
Instructions:

- This exam is given in two versions, English and Swedish. In case of ambiguity it is the ENGLISH text that holds.
- During the exam you MAY NOT use textbooks, class notes, or any other supporting material apart from the formula sheet given to you.
- Use of calculators is permitted for performing calculations. The use of graphic or programmable features is NOT permitted.
- You can use the formula sheet that come with the exam.
- Start every problem on a new page, and write at the top of the page which problem it belongs to. (But in multiple part problems it is not necessary to start every part on a new page)
- In all of your solutions, give explanations to clearly show your reasoning. Points may be deducted for unclear and wrong argument, even if the final answer is correct.
- Write clearly and legibly.
- Where applicable, indicate your final answer clearly by putting A BOX around it.

Note: There are six problems, some with multiple parts. The problems are not ordered according to difficulty

- (1) (5pt) Compute Taylor polynomial of degree 3 of the function

$$f(x) = e^x(x^2 + 1)$$

around the point $x_0 = 0$, and use it to give an approximation of $f(0.1)$.

- (2) Consider the equation

$$y^2 e^{2x} = 3y + 2 + C$$

defining a curve Γ in the (x, y) -plane.

- (a) (1 pt) Determine the value of C such that the curve goes through the point $(0, 3)$.
- (b) (3pt) Let now $C = -2$. Locally around the point $(0, 3)$ the curve defines $y = y(x)$ as a function of x . Determine the value of $y'(0)$.
- (c) (1pt) Provide the equation of the tangent line to the curve Γ at the point $(0, 3)$.

- (3) Consider the function

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x - 1}\right)$$

- (a) (2pt) Find the natural domain of $f(x)$ and the points where $f(x) = 0$.
- (b) (2pt) Find where the function is increasing and where it is decreasing. Find the critical points of $f(x)$ and determine their type.
- (c) (1pt) Find the maximum and minimum values that the function takes on the interval $[\frac{3}{2}, 3]$.

- (4) Compute the following integrals:

(a) (2.5 pt) $\int \left(\frac{2x \ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1} + x^3 \right) dx,$

(b) (2.5pt) $\int_1^e \ln(2x) dx.$

(5) **Linear Algebra**

(a) (2 pt) Consider the matrices $A = (1, 2, 0, 0)$ and

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

By A^T and B^T we denote the transpose of A and B . Determine which of the following products are possible to compute: $A \cdot A$, $B \cdot B^T$, $B \cdot A$, and $A \cdot B$. When the product is possible determine the shape of the result matrix.

(b) (1 pt) With A and B as above, compute $B^T \cdot A^T$.

(c) (2 pt) Determine the number of solutions of the following linear system using Gauss-Jordan elimination

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 4 \\ x & +y & +z & = & 0 \\ 2x & & -z & = & -4 \end{cases}$$

(You will not get partial points for providing a solution without using Gauss-Jordan elimination)

(6) Consider the two variables function

$$f(x, y) = (2x + 1)(2y - 1)$$

defined on the area

$$D = \{(x, y) \mid y \leq 0, y \geq x^2 - 1\}.$$

(a) (2pt) Find all the critical points of $f(x, y)$ – even those lying outside D – and determine their type.

(b) (2pt) Determine the maximum and minimum points of f on the *boundary* of D . (In order to get credit you have to explain what you are doing, the correct answer without the right explanation will not be accepted)

(c) (1 pt) Determine the minimum and the maximum value of $f(x, y)$ on D . (If you have not solved (b), you may assume that you got minimum value 1 and maximum value 2 – which may or not be the correct values)

GOOD LUCK!!!

Senska texten, (formular finns ovanför)

- (1) (5pt) Beräkna Taylorpolynomet av grad 3 till funktionen

$$f(x) = e^x(x^2 + 1)$$

omkring punkten $x_0 = 0$, och använd det för approximera $f(0.1)$.

- (2) Betrakta ekvationen

$$y^2 e^{2x} = 3y + 2 + C$$

som definerar en kurva Γ i (x, y) -planet.

- (a) (1 pt) Bestäm värdet av C sådan att kurvan går genom punkten $(0, 3)$.
- (b) (3pt) Låt $C = 0$. Kring punkten $(0, 3)$ definierar kurvan Γ en funktion $y = y(x)$ av x . Hitta $y'(0)$.
- (c) (1pt) Ange ekvationen till tangentlinjen av Γ i punkten $(0, 3)$.

- (3) Betrakta funktionen

$$f(x) = \ln \left(\frac{x^2 + 1}{x - 1} \right)$$

- (a) (2pt) Hitta funktionens naturliga definitionsområde och hitta lösningarna till $f(x) = 0$.
- (b) (2pt) Hitta alla kritiska punkter av f och bestäm deras typ. Bestäm var funktionen är växande och var den är avtagande.
- (c) (1pt) Bestäm maximum och minimum till $f(x)$ på intervallet $[-2, -\frac{1}{3}]$.

- (4) Beräkna följande integraler

$$(a) \quad (2.5 \text{ pt}) \int \left(\frac{2x \ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1} + x^3 \right) dx,$$

$$(b) \quad (2.5 \text{ pt}) \int_1^e \ln(2x) dx.$$

- (5)
- Linjär algebra**

- (a) (2 pt) Betrakta matrisen
- $A = (1, 2, 0, 0)$
- och

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Med A^T och B^T menar vi transpotaten till A och B . Bestem vilka av följande produkter man kan beräkna: $A \cdot A$, $B \cdot B^T$, $B \cdot A$, and $A \cdot B$. När prdukten är möjligt, bestem formen till resultat-matrisen.

- (b) (1 pt) Med A och B som ovanför, beräkna $B^T \cdot A^T$.
- (c) (2 pt) Bestäm antal lösningar till det följande systemet med andvänding av Gauss-Jordan elimination

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 4 \\ x & +y & +z & = & 0 \\ 2x & & -z & = & -4 \end{cases}$$

- (6) Betrakta följande funktion av två variabler

$$f(x, y) = (2x + 1)(2y - 1)$$

som defineras på området

$$D = \{(x, y) \mid y \geq 0, y \leq -x^2 + 1\}.$$

- (a) (2pt) Hitta alla kritiska punkter av $f(x, y)$ – punkter som ligger utanför D behöver också hittas – och bestäm deras typ.
- (b) (2pt) Hitta maximum och minimum av $f(x, y)$ på *randen* av D .
- (c) (1 pt) Beräkna minimum och maximum av $f(x, y)$ på D . (Om man inte har löst (b), kan man anta att minimum- och maximumvärdena på randen av D är 1 och 2 – som kan vara eller inte vara de korrekta värdena)

LYCKA TILL!!!