

Inga hjälpmedel tillåtna. 15 poäng ger säkert godkänt på den skriftliga delen. Samtliga svar måste motiveras ordentligt!

1. (a) Bestäm gränsvärdet $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$ eller visa att det inte finns. 1 p
- (b) Bestäm gränsvärdet $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$ eller visa att det inte finns. 1 p
- (c) Bestäm gränsvärdet $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$ eller visa att det inte finns. 1 p
- (d) För vilket värde på c är funktionen

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ c & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

kontinuerlig? 1 p

Motivera dina svar!

2. Bestäm alla stationära punkter till funktionen 6 p

$$F(x, y) = 3x^4 - 6x^2y + 2y^3 + 7$$

och avgör deras karaktär.

3. Avgör om funktionen 5 p

$$f(x, y, z) = (1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2)e^{x^2+y^2+z^2}$$

antar största och/eller minsta värde i \mathbb{R}^3 och bestäm dessa i så fall.

4. Undersök om funktionen $h(x, y) = \arctan(x^2 + y^2)$ antar ett största och/eller minsta värde längs kurvan $x^3 + y^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Bestäm dem i förekommande fall. 5 p

5. (a) Visa att för en C^2 -funktion f skrivs uttrycket $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ i polära koordinater (dvs $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$) som $r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$. 3 p

Tips: Det kan vara bra att börja med att beräkna derivatorna med avseende på r .

- (b) Lös (för $r > 0$) den partiella differentialekvationen 2 p

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)f.$$

Var god vänd!

6. (a) Undersök om följande serier är konvergenta: 3 p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-50}{n^2} (-1)^n$$

- (b) För vilka värden på α är den generaliserade integralen 2 p

$$\int_0^1 \frac{5 + \arctan x}{x^\alpha} dx$$

konvergent? Motivera ditt svar!

Resultat publiceras på kurshemsidan, men rättningen kommer inte ske före mot slutet av v17. Även information angående anmälan och schemat för muntorna kommer upp på hemsidan efter att den skriftliga tentan är rättad.

Muntorna kommer att äga rum v19 (eller v18 vid särskilt önskemål).

Visning av skriftliga tentorna: Torsdag, 2/5, kl 12:30 i rum 209.

Återlämning: bara efter att betyg har satts, dvs säkert när alla muntliga tentor har avslutats, på studentexpeditionen, rum 204 i hus 6.

Vid frågor kontakta: Annemarie Luger (luger@math.su.se)

Lycka till!