MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Annemarie Luger

Lösningsförslag i
Analys A, 7.5 hp
den 28/11 2019

Endast kommenterade svar!!! OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

1. *Betrakta funktionen* $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} : g(x,y) = \arctan \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$. *5 p*

   (a) *Undersök om gränsvärdet* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ *finns och bestäm det i förekommande fall.*

   (b) *Undersök om gränsvärdet* $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} g(x,y)$ *finns och bestäm det i förekommande fall.*

   (c) *Ange en kurva, sådan att funktionen g är konstant längs kurvan (med enda eventuella undantag att funktionen inte är definierad i origo).*

   Vi börjar med att skriva om funktionen i polära koordinater

$$g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \ldots = \arctan\big(\frac{1}{r}(\cos\varphi + \sin\varphi)\big)$$

   (a) Om $r \to 0$ ser vi från omskrivningen ovan att gränsvärdet beror på riktningen φ. Speciellt ser vi t.ex.

$$\lim_{t\to 0+} g(0,t) = \lim_{t\to 0+} \arctan\frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{t\to 0} g(t,-t) = \lim_{t\to} \arctan 0 = 0,$$

   dvs $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ finns inte.
   Kommentar: $\lim\limits_{t\to 0-} g(0,t) = \lim_{t\to 0-} \arctan\frac{1}{t} = -\frac{\pi}{2}$ skulle ge ännu ett annat värde.

   (b) I omskrivningen ovan är $\cos\varphi + \sin\varphi$ begränsad och därmed $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} g(x,y) = 0$, ty $\frac{1}{r} \to 0$, funktionen arctan är kontinuerlig och $\arctan 0 = 0$.

   (c) Vi ser direkt att funktionen g är konstant lika med 0 längs den räta linjen $x+y=0$. Om vi vill även se andra kurvor sätter vi $\dfrac{x+y}{x^2+y^2} = C$. Om $C=0$ är det precis linjen innan, annars får vi $x^2 - \frac{1}{C}x + y^2 - \frac{1}{C}y = 0$. Genom kvadratkompletteringen får vi

$$(x - \frac{1}{2C})^2 + (y - \frac{1}{2C})^2 = \frac{1}{2C^2},$$

   dvs cirklar med medelpunkt på första medianen och som går genom origo. OBS gränsfallet då radien växer över alla gränser utgörs av den räta linjen $x+y=0$.

   Svar: a) <u>gränsvärdet existerar ej</u> b) <u>0</u> c) <u>t.ex. $y=-x$</u>.

2. *Avgör om funktionen* $G(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-4}{x^2+5y^2+1}$ *antar största och/eller minsta värde i mängden* $D := \{(x,y) : |y| \le 1\}$ *och bestäm dessa extremvärden i förekommande fall.* *5 p*

   Vi ser direkt att funktionen är begränsad, ty

$$G(x,y) = \frac{x^2+y^2-4}{x^2+5y^2+1} < \frac{x^2+5y^2+1}{x^2+5y^2+1} = 1.$$

   Vi har alltså $G(x,y) < 1$ men också $\lim\limits_{x\to\infty} G(x,0) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-4}{x^2+1} = 1$. Därmed antar G inte något största värde.

   Vi konstaterar att funktion G är noll längs den delen av cirkellinjen $x^2+y^2=4$ som ligger innanför remsan $|y| \le 1$. På området $D_- := \{(x,y) : |y| \le 1, x^2+y^2 \le 4\}$ är funktionen icke-positiv, och utanför D_- positiv. Funktionen är kontinuerlig och antar därför ett minsta värde på det kompakta området D_-, som är mindre än noll och därmed även minsta värdet av G på hela området D.

För att bestämma minsta värdet börjar vi med att kolla eventuella stationära punkter i det inre av D_-. Vi får ekvationssystemet

$$\begin{aligned} G'_x(x,y) &= \ldots = \frac{2x(4y^2+5)}{(x^2+5y^2+1)^2} = 0. \\ G'_y(x,y) &= \ldots = \frac{2y(-4x^2+21)}{(x^2+5y^2+1)^2} = 0. \end{aligned}$$

Från den första ekvationen ser vi direkt att $x = 0$ och därmed pga den andra ekvationen även $y = 0$. Den enda stationära punkten är alltså origo.

Randen av D_- består av två cirkelbågar, samt två sträckor med $y = \pm 1$. Längs cirkelbågarna är funktionen noll. Vi kollar alltså längs sträckorna $(t, \pm 1)$ då gränserna för t fås genom att beräkna skärningspunkterna mellan cirkeln $x^2 + y^2 = 4$ och linjen $y = 1$ (för $y = -1$ blir det samma gränser). Vi får då $x = \pm\sqrt{3}$. Alltså betraktar vi hjälpfunktionen

$$h(t) := g(x, \pm 1) = \frac{x^2-3}{x^2+6} = 1 - \frac{9}{x^2+6} \qquad -\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}.$$

Derivatan blir då $h'(t) = \dfrac{9 \cdot 2x}{(x^2+6)^2}$, och den är noll precis om $x = 0$. För att får minsta värdet måste vi alltså jämföra

$$g(0,0) = -4 \qquad h(0) = -\frac{1}{2} \qquad h(\pm\sqrt{3}, \pm 1) = 0.$$

Svar: minsta värde -4 största värde finns ej.

3. *Betrakta funktionen* *5 p*

$$f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+2z^2) + xy.$$

Bestäm alla stationära punkter till f och avgör deras karaktär.

Vi konstaterar att funktionen f är definierad för alla punkter i $\mathbb{R}^3$ utom origo $(0,0,0)$ och betraktar ekvationssystemet

$$\begin{aligned} f'_x &= \frac{2x}{x^2+y^2+2z^2} + y = 0 \\ f'_y &= \frac{2y}{x^2+y^2+2z^2} + x = 0 \\ f'_z &= \frac{4z}{x^2+y^2+2z^2} = 0. \end{aligned}$$

Från den tredje ekvationen ser vi direkt att $z = 0$, då blir de första två ekvationer

$$\begin{aligned} (I) \quad \frac{2x}{x^2+y^2} + y &= 0 \\ (II) \quad \frac{2y}{x^2+y^2} + x &= 0. \end{aligned}$$

Om vi multiplicera den första ekvationen med y och den andre med $-x$ och addera dessa två får vi

$$y^2 - x^2 = 0,$$

dvs $y = x$ eller $y = -x$. I första fallet ger den första ekvationen $\dfrac{2x}{2x^2} + x = 0$ eller $1 + x^2 = 0$ som inte har några (reella) lösningar. I andra fallet däremot får vi $1 + x^2 = 0$, dvs $x = \pm 1$. Vi har alltså två stationära punkter $(1, -1, 0)$ och $(-1, 1, 0)$.

För att bestämma karaktär hos de stationära punkterna beräknar vi även de andra partiella derivatorna:

$$f''_{xx} = \ldots = 2\frac{-x^2+y^2+2z^2}{(x^2+y^2+2z^2)^2} \qquad f''_{xy} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2+2z^2)^2} + 1 \qquad f''_{xz} = \frac{-8xz}{(x^2+y^2+2z^2)^2}.$$

$$f''_{yy} = \ldots = 2\frac{x^2-y^2+2z^2}{(x^2+y^2+2z^2)^2} \qquad f''_{yz} = \frac{-8yz}{(x^2+y^2+2z^2)^2} \qquad f''_{zz} = \ldots = 4\frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+2z^2)^2}.$$

För båda stationära punkter är då den kvadratiska formen

$$Q(h,k,\ell) = 0\cdot h^2 + 0\cdot k^2 + 0\cdot \ell^2 + 2\cdot 2\cdot hk + 0\cdot h\ell + 0\cdot k\ell = 4hk + 2\ell^2,$$

som är indefinit. Det ser man t.ex. genom att titta på $Q(t,t,0) = 4t^2$ och $Q(t,-t,0) = -4t^2$, dvs Q antar både positiva och negativa värden.

Svar: De stationära punkterna $(1,-1,0)$ och $(-1,1,0)$ är både sadelpunkter.

4. *Betrakta funktionen* $h(x,y) = x^4 + y^4$. 5 p

   (a) *Avgör om funktionen* h *antar på kurvan* $x^2 + 6xy + y^2 = 2$ *största och/eller minsta värde, och bestäm dessa i förekommande fall.*

   (b) *För vilka värden på* $\alpha \in \mathbb{R}$ *är funktionen* h *på kurvan* $x^2 + 2\alpha xy + y^2 = 2$ *begränsad?*

(a) Kurvan kan skrivas på formen $(x+3y)^2 - 8y^2 = 2$ (ses genom kvadratkomplettering) och är därmed obegränsad (den är en hyperbel, eller så ser man att för varje godtyckligt stor värde på y kan man lösa ut x, dvs kurven innehåller punkter med godtyckligt stor y-koordinat). Därför är även funktionen $h(x,y) = x^4 + y^4$ obegränsad på kurvan och antar därmed inget största värde. Däremot antar funktionen ett minsta värde, ty vi kan inskränka oss på t.ex. en kompakt cirkelskiva med tillräckligt stor radie. Snittet med kurvan är en kompakt mängd och ty h är kontinuerlig antar den ett minsta värde där. Om vi väljer radien tillräckligt stor blir det även minsta värdet för h på hela kurvan.

För att beräkna värdet kollar vi det nödvändiga villkoret:

$$\det\begin{pmatrix} 2x+6y & 4^3 \\ 6x+2y & 4y^3 \end{pmatrix} = 0$$

Faktorisering (efter lite räkning) ger ekvationen

$$8(y-x)(y+x)(3x^2+3y^2+xy) = 0$$

Vi har antingen $y = x$ eller $y = -x$. Den sista faktorn är lika med $3(x+\frac{y}{6})^2 + \frac{11}{12}y^2$, den är noll precis om $y =$ och $x = 0$, men origo ligger inte på kurvan. Alltså har vi två fall:

Fall 1: $y = x$ Genom att stoppa in det i kurvans ekvationen får vi (efter lite räkning) två möjliga minimi-punkter $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ och $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Fall 2: $y = -x$ Det finns inga punkter som uppfyller kurvans ekvation (om man stopp in får man $-2x^2 = 1$, som inte har en reell lösning).

Eftersom $h(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = h(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$ är detta alltså minsta värdet.

(b) Vi skriver kurvans ekvation om till $(x+\alpha y)^2 + (1-\alpha^2)y^2 = 2$ (med hjälp av kvadratkomplettering) och har olika fall:
För $\alpha^2 < 1$ är kurvan begränsad (en ellips), och därmed kompakt, den kontinuerliga funktionen h antar därmed största och minsta värde och är alltså begränsad.
För $\alpha^2 > 1$ innehåller kurvan som i (a) punkter med godtyckligt stora y-koordinater och därmed är h obegränsad.
För $\alpha^2 = 1$ består kurvan av två parallella linjer som även i detta fall innehåller punkter med godtyckligt stora koordinater och därför är h ej begränsad.

Svar: (a) Minsta värde $\frac{1}{8}$, största värde finns ej. (b) $-1 < \alpha < 1$.

5. *Bestäm alla C^2-funktioner F som uppfyller differentialekvationen* *5 p*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{4y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{1}{4y^3}\frac{\partial F}{\partial y} = 16y^2$$

i området $y > 0$, t.ex. genom att införa de nya variablerna $s = x + y^2$ och $t = x - y^2$.

Vi använder de nya koordinaterna för att få en differentialekvation för $\widetilde{F}(s,t) := F(x,y)$. Att räkna om partiella derivatorna i de nya koordinaterna ger

$$\begin{aligned} F''_{xx} &= \widetilde{F}''_{ss} + 2\widetilde{F}''_{st} + \widetilde{F}''_{tt} \\ F''_{y} &= 2y\widetilde{F}'_s - 2y\widetilde{F}'_t \\ F''_{yy} &= 2\widetilde{F}'_s - 2\widetilde{F}'_t + 4y^2(\widetilde{F}''_{ss} - 2\widetilde{F}''_{st} + \widetilde{F}''_{tt}). \end{aligned}$$

Differerentialekvationen blir då $4\widetilde{F}''_{st} = 16y^2$ och därmed

$$\widetilde{F}''_{st} = 2s - 2t.$$

Integration leder till

$$\widetilde{F}(s,t) = s^2t - st^2 + h(x + y^2) + g(t)$$

och därmed

$$F(x,y) = 2y^2(x^2 - y^4) + h(x + y^2) + g(x - y^2),$$

där h och g är tillräckligt många gånger deriverbara funktioner.

6. (a) *Avgör för var och en av följande serier om den är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent:* *3 p*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+400} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^4+400}.$$

(b) *Avgör för var och en av följande generaliserade integraler om den är konvergent eller divergent:* *2 p*

$$\int_0^{\infty}\frac{\arctan(e^{\sin x})}{\sqrt{x}(x^2+1)}dx \qquad \int_0^{\infty}\frac{\arctan(e^{\sin x})}{\sqrt{x}(x^2-1)}dx.$$

(a) Vi kollar först med hjälp av jämförelsekriteriet II om den första serien är absolut konvergent. Eftersom

$$\frac{\frac{n}{n^2+400}}{\frac{1}{n}} \to 1, \qquad \text{då } n \to \infty$$

har serien $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+400}$ samma konvergensbeteende som $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, dvs den är divergent. Vi kollar om serien är betingat konvergent med hjälp av Leibniz-kriteriet. Termerna $\frac{n}{n^2+400}$ går mot 0, men vi ser inte direkt om följden är monoton. Därför inför vi hjälpfunktionen

$$h(t) := \frac{t}{t^2+400}$$

och deriverar den med avseende på t. Då får vi $h'(t) = \ldots = \frac{400-t^2}{(t^2+400)^2}$. För $t > 20$ är alltså h, och därmed även följden i fråga, strängt avtagande. Detta är tillräckligt för att kunna använda Leibnitzkriteriet och vi får att serien är konvergent.

För den andra serien använder vi igen JFK II och då $\dfrac{\dfrac{n}{n^4+400}}{\dfrac{1}{n^3}} \to 1$ är serien absolut konvergent.

(b) Den första integralen är generaliserad i 0 och ∞. Vi delar därför upp integralen som

$$\int_0^1 \frac{\arctan(e^{\sin x})}{\sqrt{x}(x^2+1)}dx + \int_1^\infty \frac{\arctan(e^{\sin x})}{\sqrt{x}(x^2+1)}dx.$$

För den vänster integralen ser vi $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{\dfrac{\arctan(e^{\sin x})}{\sqrt{x}(x^2+1)}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = \arctan(e) > 0$ och den är därmed konvergent enligt jämförelsekriteriet II, ty integralen $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ är konvergent. För den höger integralen uppskattar vi integranden för $x > 1$ med $0 \leq \dfrac{\arctan(e^{\sin x})}{\sqrt{x}(x^2+1)} \leq \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{x^2}$ och ser därmed att integralen är konvergent enligt JFK I, ty integralen $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ är konvergent.

Den andre integralen är även generaliserad i $x = 1$. Där beter sig integranden som $\dfrac{1}{x-1}$ och därmed (enligt JFK II) är integralen divergent.

Svar: a) betingat konvergent, absolut konvergent b) konvergent, divergent.