MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Annemarie Luger

Tentamenskrivning i
Analys A, 7.5 hp
den 15/4 2020, kl 9.00-14.00
Inlämning via kurssidan senast kl 16.00

Samtliga svar måste motiveras ordentligt!
Angivna poäng i tentalydelsen nedan anger maximala poäng för den skriftliga lösningen under beaktande av den muntliga redovisningen. 15 poäng på den skriftliga tentan efter muntlig redovisning (inklusive bonus) ger säkert möjlighet att gå vidare till den muntliga tentan.

Ingen kommunikation under skrivningen är tillåten!

Varje användning av ett hjälpmedel (utom papper, penna och suddgummi) ska anges i lösningen!

0. Låt parametern A vara lika med den näst sista siffran i ditt personnummer.

1. (a) Undersök om gränsvärdet av $\dfrac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$ existerar då $x^2+y^2 \to \infty$. 2 p

   (b) Betrakta $h(x,y) = \arctan \dfrac{x^2}{y}$. 3 p

   i. Undersök om gränsvärdet av $h(x,y)$ existerar då $(x,y) \to (0,0)$ med $y > 0$.
   ii. Undersök om gränsvärdet av $h(x,y)$ existerar då $(x,y) \to (0,0)$ med $y > |x|$.
   iii. Ange en (icke-konstant) funktion $H(x,y)$ sådan att gränsvärdet av produkten $H(x,y) \cdot h(x,y)$ existerar då $(x,y) \to (0,0)$ med $y > 0$.

2. (a) Undersök om $G(x,y) = y\, e^{x^2-y^2}$ antar största och/eller minsta värde i mängden 4 p

$$D = \{(x,y) : y \geq |x| + A - 10\}.$$

   OBS: Använd ditt värde av A som du har bestämt i fråga 0 ovan.

   (b) Ange ett exempel på en begränsad, men icke-kompakt delmängd av $\mathbb{R}^2$. 1 p

3. Betrakta funktionen $g(x,y) = x^4 + y^4 - \beta(x-y)^2$ med parametern $\beta \in \mathbb{R}$.

   (a) Bestäm för varje värde på β alla lokala minimipunkter till g. 4 p

   (b) Välj ett värde på β. 1 p
   Ange (för detta värde på β) en mängd M_1 sådan att g antar ett minsta värde på M_1 och ange en mängd M_2 sådan att g *inte* antar minsta värde på M_2.

4. (a) Avgör om funktionen $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$ har största och/eller minsta värde under bivillkoret

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (A+2)z^2 = 200$$

   och bestäm dessa i så fall. 4 p
   OBS1: Använd igen ditt värde för A!
   OBS2: Det är ok att svara med ”största funktionsvärdet i dessa punkter” utan att avgöra vilket som är störst!

   (b) Betrakta kurvan $x^2 - y^2 = 4$ (som en delmängd av $\mathbb{R}^2$). Ange en funktion, som antar minsta värde på denna mängd men inte största värde. Motivera ditt val! 1 p

Var god vänd!

5. Betrakta differentialekvationen 5 p

$$\frac{1}{16x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{1}{12xy^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}+\frac{1}{36y^4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{1}{16x^3}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{1}{18y^5}\frac{\partial f}{\partial y}=f$$

för $x > 0$.

(a) Visa att differentialekvationen i de nya variablerna $s = x^2 + y^3$ och $t = x^2 - y^3$ blir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = f.$$

(b) Lös den partiella differentialekvationen.

6. (a) Undersök om serien 2 p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{2n} \left(-\frac{1}{9}\right)^n$$

är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent.

(b) För vilka $x \in \mathbb{R}$ är serien $\sum_{n=0}^{\infty} n(x-1)^n$ konvergent. 1 p

(c) Undersök om den generaliserade integralen 2 p

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^{\frac{5}{4}}(x^2+3)}\,dx$$

är konvergent.

Efter den muntliga redovisningen kommer resultatet på den skriftliga tentan publiceras på kurssidan så snart som möjligt. Även information angående anmälan till muntan kommer upp där efter att rättningen av den skriftliga tentan är avslutad.

Vid frågor kontakta: Annemarie Luger (luger@math.su.se)

Lycka till!