MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Annemarie Luger

Lösningsförslag
Analys A, 7.5 hp
den 15/4 2020, kl 9.00-14.00
Inlämning via kurssidan senast kl 16.00

Endast kommenterade svar!!! OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

0. *Låt parametern A vara lika med den näst sista siffran i ditt personnummer.*

Lösningsförslaget skrivs med parametern, för att ha alla olika varianter med.

1. *(a) Undersök om gränsvärdet av* $\dfrac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$ *existerar då* $x^2+y^2 \to \infty$. *2 p*

   (b) Betrakta $h(x,y) = \arctan \dfrac{x^2}{y}$. *3 p*

   i. Undersök om gränsvärdet av $h(x,y)$ existerar då $(x,y) \to (0,0)$ med $y > 0$.
   ii. Undersök om gränsvärdet av $h(x,y)$ existerar då $(x,y) \to (0,0)$ med $y > |x|$.
   iii. Ange en (icke-konstant) funktion $H(x,y)$ sådan att gränsvärdet av produkten $H(x,y) \cdot h(x,y)$ existerar då $(x,y) \to (0,0)$ med $y > 0$.

(a) En möjlighet är användning av polära koordinater:

$$0 \leq \left| \frac{r^3(\cos^3 t + \sin^3 t)}{r^4(\cos^4 t + \sin^4 t)} \right| \leq \frac{2}{r(\cos^4 t + \sin^4 t)} \leq \frac{4}{r}.$$

Med hjälp av instängningsregeln kan vi då dra slutsatsen att $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} \dfrac{x^3+y^3}{x^4+y^4} = 0$. Den sista olikheten ovan fås t.ex. genom omskrivningen

$$\cos^4 t + \sin^4 t = \cos^2 t(1-\sin^2 t) + \sin^2 t(1-\cos^2 t) = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2t \geq \frac{1}{2}.$$

(b) i. I övre halvplanet kan vi välja två olika vägar

$$h(0,y) = \arctan 0 = 0 \quad \text{och } h(x,x^2) = \arctan \frac{x^2}{x^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

och därmed existerar gränsvärdet i området $y > 0$ inte.
ii. Observera först att kurvan $y = x^2$ som används ovan inte ligger i området $y > |x|$. Nu kan vi däremot göra en uppskattning

$$0 \leq \frac{x^2}{y} < \frac{y^2}{y} = y$$

och ty arctan-funktionen är monoton får vi

$$0 \leq \arctan \frac{x^2}{y} < \arctan y.$$

Igen instängningsregeln ger att gränsvärdet i detta fall är 0.
(iii) Eftersom h är begränsad så duger t.ex. varje funktion H, sådan att $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} H(x,y) = 0$, t.ex $H(x,y) = y$.

Svar: (a) $\underline{\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} \dfrac{x^3+y^3}{x^4+y^4} = 0}$

(b) i. gränsvärdet existerar inte, ii. gränsvärdet är 0, iii. t.ex. $H(x,y) = y$.

2. *(a) Undersök om $G(x,y) = y\, e^{x^2-y^2}$ antar största och/eller minsta värde i mängden* *4 p*

$$D = \{(x,y) : y \geq |x| + A - 10\}.$$

OBS: Använd ditt värde av A som du har bestämt i fråga 0 ovan.

(b) Ange ett exempel på en begränsad, men icke-kompakt delmängd av $\mathbb{R}^2$. *1 p*

(a) Området består av alla punkter som ligger ovanför kurvan $y = |x| - \widetilde{A}$, där jag för enkelhets skull använder $\widetilde{A} := 10 - A$. Parametern $\widetilde{A}$ kan anta följande värden $1, 2, \ldots\ldots 10$.

Vi konstaterar först att linjen $y = x$ ligger inom området och $G(t,t) = t$ är uppåt obegränsad, alltså antar G inte största värde.

Vi ser att $G \geq 0$ för alla punkter med $y \geq 0$ och $G \leq 0$ för $y \leq 0$. Eftersom

$$D_0 := \{(x,y) \in D, y \leq 0\}$$

är en sluten triangel och därmed kompakt, samt att G är kontinuerlig så antar G minsta värde på D_0 som också är minsta värdet på D.

(b) Om mängden är begränsad men inte kompakt, så får den inte vara sluten. T.ex. den öppna enhetscirkelskivan är en sådan mängd $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

3. *Betrakta funktionen $g(x,y) = x^4 + y^4 - \beta(x-y)^2$ med parametern $\beta \in \mathbb{R}$.*

(a) Bestäm för varje värde på β alla lokala minimipunkter till g. *4 p*

(b) Välj ett värde på β. *1 p*
Ange (för detta värde på β) en mängd M_1 sådan att g antar ett minsta värde på M_1 och ange en mängd M_2 sådan att g inte antar minsta värde på M_2.

(a) Vi betraktar ekvationssystemet

$$\begin{aligned} (I)\quad g'_x &= 4x^3 - 2\beta(x-y) = 0 \\ (II)\quad g'_y &= 4y^3 + 2\beta(x-y) = 0. \end{aligned}$$

Addition av ekvationerna ger $4x^3 + 4y^3 = 0$, alltså $y = -x$. Från den första ekvationen får vi då efter lite omskrivning $x(x^2 - \beta) = 0$. Därmed har vi (för varje värde på β den stationära punkten $(0,0)$ samt för positiva β två till stationära punkter $(\pm\sqrt{\beta}, \mp\sqrt{\beta})$.

För att bestämma deras karaktär beräknar vi även de andra partiella derivatorna:

$$g''_{xx} = 12x^2 - 2\beta \qquad g''_{xy} = g''_{yx} = 2\beta \qquad g''_{yy} = 12y^2 - 2\beta.$$

För båda punkter $(\pm\sqrt{\beta}, \mp\sqrt{\beta})$ är den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = \ldots = 10\beta\Big((h + \frac{1}{5}k)^2 + (1 - \frac{1}{25})k^2\Big)$$

positivt definit, ty $\beta > 0$! Båda punkter är alltså lokala minimipunkter.

För punkten $(0,0)$ är den kvadratiska formen $Q(h,k) = \ldots = -2\beta(h-k)^2$ semidefinit och avgör därmed inte karaktären.

Vi tittar igen på $g(x,y) = x^4 + y^4 - \beta(x-y)^2$ och observerar att för $\beta < 0$ gäller $g(x,y) \geq 0 = g(0,0)$ och därmed är $(0,0)$ i detta fall en (även global) minimipunkt. För $\beta > 0$ däremot har vi $g(t,t) = 2t^4 \geq 0$ medan $g(t,0) = t^2(-\beta + t^2)$ antar negativa värden för tillräckligt små t. I detta fall är $(0,0)$ alltså en sadelpunkt. Sammanfattningsvis har vi fått följande:

$\underline{\beta > 0}$: $(\pm\sqrt{\beta}, \mp\sqrt{\beta})$ är lokala minimipunkter och $(0,0)$ är en sadelpunkt.
$\underline{\beta \leq 0}$: den enda stationära punkten $(0,0)$ är en minimipunkt.

(b) Oavsett värdet på β kan mängden M_1 väljas som en godtycklig kompakt mängd ty g är kontinuerlig, t.ex. den slutna enhetscirkelskivan $M_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Ett exempel på M_2 får vi t.ex. genom att välja något $\beta \leq 0$ och $M_2 = \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$, ty vi har sett att $g(x,y) > 0$ i denna mängd men eftersom $g(0,0) = 0$ och g är kontinuerlig, så antar g i M_2 värden godtyckligt nära 0.

Svar: (a) För $\beta > 0$ är $(\pm\sqrt{\beta}, \mp\sqrt{\beta})$ är lokala maximipunkter, för $b \leq 0$ är endast $(0,0)$ en minimipunkt

(b) t.ex. $M_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ och $M_2 = \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$.

4. *(a) Avgör om funktionen* $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$ *har största och/eller minsta värde under bivillkoret*

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (A+2)z^2 = 200$$

och bestäm dessa i så fall. *4 p*

OBS1: Använd igen ditt värde för A!

OBS2: Det är ok att svara med "största värdet av dessa tal" utan av numeriskt avgöra vilket som är störst!

(b) Betrakta kurvan $x^2 - y^2 = 4$ *(som en delmängd av* $\mathbb{R}^2$*). Ange en funktion, som antar minsta värde på denna mängd men inte största värde.* *1 p*

(a) Bivillkoret beskriver i alla fall en ellipsoid, dvs en kompakt mängd. Funktionen f är inte kontinuerlig i hela $\mathbb{R}^3$ men kontinuerlig i alla punkter som uppfyller bivillkoret (ty origo inte uppfyller det) och därmed har f både största och minsta värde under bivillkoret.

Vi konstaterar att det inte finns singulära punkter (på ellipsoiden) och använder metoden av Lagrangemultiplikatorer, dvs vi betraktar hjälpfunktionen

$$H(x,y;\lambda) := \frac{1}{x^2+y^2+z^2} + \lambda\big((x-1)^2 + (y+1)^2 + (A+2)z^2 - 200\big).$$

Partiell derivering ger följande ekvationssystem

$$\begin{aligned} -\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^2} + 2\lambda(x-1) &= 0 \\ -\frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^2} + 2\lambda(y+1) &= 0 \\ -\frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^2} + 2\lambda(A+2)z &= 0 \end{aligned}$$

samt

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (A+2)z^2 - 200 = 0.$$

Elimination av λ i den första och andra ekvationen samt i den den andra och den tredje ger - efter lite omskrivning -

$$x = -y \qquad \text{samt} \qquad z\left(y - \frac{1}{A+1}\right) = 0.$$

I den andra ekvationen får vi två fall. Om $z = 0$ så får vi tillsammans med $x = -y$ från bivillkoret punkterna $(11, -11, 0)$ och $(-9, 9, 0)$.

I det andra fallet, nämligen $y = \frac{1}{A+1}$ (OBS $A+1 \neq 0$), så ger bivillkoret $z = \pm\sqrt{\dfrac{200 - 2\frac{(A+2)^2}{(A+1)^2}}{A+2}}$.

Största och minsta värdet finns därför bland funktionsvärdena i dessa punkter, dvs

$$f(11,-11,0) = \frac{1}{242}, \qquad f(-9,9,0) = \frac{1}{162},$$

och

$$f\left(-\frac{1}{A+1}, \frac{1}{A+1}, \pm\sqrt{\frac{200 - 2\frac{(A+2)^2}{(A+1)^2}}{A+2}}\right) = \frac{1}{\frac{2}{(A+1)^2} + \frac{200}{A+2} - \frac{2(A+2)}{(A+1)^2}}.$$

Anmärkning: I alla fall är minsta värdet $\frac{1}{242}$ och största värdet det som ges av punkterna med $z \neq 0$, men det krävs inte i lösningen.

(b) Kurvan är en hyperbel t.ex. funktionen $f(x,y) = x^2 + y^2$ antar minsta värdet men ej största värde. Den antar minsta värdet eftersom snittet av hyperbeln med en sluten cirkelskiva med radie t.ex. 10 är en kompakt mängd och värdet av den kontinuerliga funktionen f utanför denna mängd är säkert större än i mängden. Därför antar f ett minsta värde i cirkelskivan som även är minsta värdet på hela hyperbeln. Däremot är hyperbeln en obegränsad mängd och därför även f (som ju ange avståndet till origo i kvadrat) obegränsad på hyperbeln.

Ett annat enkelt exempel är $f(x,y) = |x|$. Tydligen är x koordinaten för punkter på hyperbeln antingen större än 2 eller mindre än -2, alltså antar f alla värden större eller lika med 2.

5. *Betrakta differentialekvationen* *5 p*

$$\frac{1}{16x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{12xy^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{1}{36y^4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{16x^3}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{18y^5}\frac{\partial f}{\partial y} = f$$

för $x > 0$.

(a) *Visa att differentialekvationen i de nya variablerna* $s = x^2 + y^3$ *och* $t = x^2 - y^3$ *blir*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = f.$$

(b) *Lös den partiella differentialekvationen.*

(a) Vi använder de nya koordinaterna för att få en differentialekvation för $\widetilde{F}(s,t) := F(x,y)$. Att räkna om partiella derivatorna i de nya koordinaterna ger

$$\begin{aligned}
F''_x &= \widetilde{F}'_s 2x + \widetilde{F}'_t 2x \\
F''_{xx} &= \ldots = 4x^2(\widetilde{F}''_{ss} + 2\widetilde{F}''_{st} + \widetilde{F}''_{tt}) + 2\widetilde{F}'_s + 2\widetilde{F}'_t \\
F''_{xy} &= \ldots = 6xy^2(\widetilde{F}''_{ss} - \widetilde{F}''_{tt}) \\
F''_{yy} &= \ldots = 9y^2(\widetilde{F}''_{ss} - 2\widetilde{F}''_{st} + \widetilde{F}''_{tt}) + 6y\widetilde{F}'_s - 6y\widetilde{F}'_t.
\end{aligned}$$

Differerentialekvationen blir då verkligen

$$\widetilde{F}''_{ss} = F.$$

(b) Lösningen blir då $\widetilde{F}(s,t) = A(t)e^s + B(t)e^{-s}$ och därmed

$$F(x,y) = A(x^2 - y^3)e^{x^2+y^3} + B(x^2 - y^3)e^{-(x^2+y^3)}$$

med tillräckligt många gånger deriverbara funktioner A och B.

6. (a) *Undersök om serien* *2 p*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{2n} \left(-\frac{1}{9}\right)^n$$

är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent.

(b) *För vilka* $x \in \mathbb{R}$ *är serien* $\sum_{n=0}^{\infty} n(x-1)^n$ *konvergent.* *1 p*

(c) *Undersök om den generaliserade integralen* *2 p*

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^{\frac{5}{4}}(x^2+3)}\, dx$$

är konvergent.

(a) Vi använder kvotkriteriet och får

$$\left| \frac{\binom{3(n+1)}{2(n+1)} \left(-\frac{1}{9}\right)^{(n+1)}}{\binom{3n}{2n} \left(-\frac{1}{9}\right)^n} \right| = \ldots = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} \cdot \frac{1}{9} \to \frac{3}{4} \qquad \text{då } n \to \infty.$$

Eftersom gränsvärdet $\frac{3}{4} < 1$ är serien absolut konvergent.

(b) För att använda rotkriteriet beräknar vi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n(x-1)^n|} = |x-1|$. Därmed får vi att serien är absolut konvergent för $|x-1| < 1$ dvs för $0 < x < 2$ och divergent för $|x-1| > 1$ dvs för $x < 0$ eller $x > 2$. I gränspunkterna $|x-1| = 1$ avgör rotkriteriet inte och vi kollar serien direkt, nämligen $\sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n$ och $\sum_{n=0}^{\infty} n(1)^n$. I båda fall går termerna inte mot 0, alltså är serierna divergenta.

(c) Vi konstaterar först att integralen är generaliserad både i $x = 0$ och vid ∞ och delar därför upp integralen t.ex. som

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^{\frac{5}{4}}(x^2+3)}\,dx = \int_0^7 \frac{\arctan x}{x^{\frac{5}{4}}(x^2+3)}\,dx + \int_7^\infty \frac{\arctan x}{x^{\frac{5}{4}}(x^2+3)}\,dx.$$

För den första integralen använder vi JFKII och beräknar

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\arctan x}{x^{\frac{5}{4}}(x^2+3)}}{x^{\frac{1}{4}}} = \ldots = \frac{1}{3},$$

och därmed har den första integralen samma konvergensbeteende som $\int_0^7 \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\,dx$, alltså konvergent. För den andra integralen kan vi t.ex. använda JFKI genom att för $x > 7$ uppskatta $\frac{\arctan x}{x^{\frac{5}{4}}(x^2+3)} \leq \frac{\frac{\pi}{4}}{x^2}$. Eftersom $\int_7^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ är konvergent är även den andra integralen konvergent.

Svar: (a) abolut konvergent (b) konvergent för $0 < x < 1$. (c) konvergent.