

Angivna poäng i tentalydelsen nedan anger maximala poäng för den skriftliga lösningen under beaktande av den muntliga redovisningen. 15 poäng på den skriftliga tentan efter muntlig redovisning ger säkert möjlighet att gå vidare till den muntliga tentan.

**Ingen kommunikation under skrivningen är tillåten!**

*Samtliga svar måste motiveras ordentligt!*

0. Låt parametern  $a$  vara lika med numret på din födelsemånad (t.ex. om du är född i september så är  $a = 9$  för dig).

1. Undersök följande gränsvärden och beräkna dem i förekommande fall: 5 p

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{\frac{-1}{x^2+2xy+2y^2}} \quad \lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} e^{-(x^2+4xy+3y^2)}.$$

2. Betrakta funktionen  $G(x, y, z) = xy - xz - yz + axyz$ , där parametern  $a$  har värdet från fråga 0.

(a) Bestäm alla stationära punkter till  $G$  samt deras karaktär. 4 p

(b) Avgör om  $G$  antar största och/eller minsta värde i mängden 1 p

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

3. Låt  $h(x, y) = \frac{e^{-(x+y)}}{1+x^2+y^2}$ .

(a) Betrakta mängden 4 p

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0 \text{ och } y \geq 0\}.$$

i. Avgör om funktionen  $h$  antar största och/eller minsta värde i området  $D_1$  och bestäm dessa i förekommande fall.

ii. Ange värdemängden av  $h$  i området  $D_1$ , dvs ange mängden av alla värden som  $h$  antar i  $D_1$ , och motivera hur du har kommit fram till denna mängd.

(b) Avgör om funktionen  $h$  antar största och/eller minsta värde i området 1 p

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}.$$

4. Undersök om funktionen  $f(x, y) = x + y$  antar största och/eller minsta värde på kurvan  $x^2 + xy + 2y^2 = 7$  med  $y \geq 0$  och bestäm dessa i så fall. 5 p

5. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$(x - y)(F''_{xx} + F''_{yy} - 2F''_{xy}) - 2(F'_x - F'_y) = (x - y)^3$$

till exempel genom variabelbytet  $u = xy$  och  $v = x + y$ . 5 p

Var god vänd!

6. (a) Visa att serien

2 p

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\ln(k^2 + 1) - 2 \ln k)$$

är konvergent.

(b) Undersök om serien

1 p

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\ln(k + 1) - \ln k)$$

är konvergent.

(c) Undersök om den generaliserade integralen

2 p

$$\int_0^{\infty} (\ln(x^2 + 1) - 2 \ln x) dx$$

är konvergent. Motivera ordentligt, dvs om du använder en sats så redogör för vad satsen säger och hur du kollar förutsättningarna.

Kallelse till den muntliga redovisningen kommer via epost (till din studentaddress).

Även information kring muntan och återlämningen kommer via epost.

Vid frågor kontakta: Annemarie Luger (luger@math.su.se)

Lycka till!