Lösningar till tentamen

Analys A,
22-03-03.

1. Båda serierna är positiva.
a) Vi skriver om och använder Taylor-utvecklingen $\ln(1+t) = t + O(t^2)$:

$$\ln(\sqrt{k}+1) - \ln\sqrt{k} = \ln(1+\frac{1}{\sqrt{k}}) = \frac{1}{\sqrt{k}} + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Jämförelsekriterium 2 ger nu att serien är konvergent om och endast om serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ konvergerar. Eftersom den sista serien divergerar gör även den ursprungliga det.

b) Samma utveckling som i a) ger

$$\ln(k^2+1) - \ln k^2 = \ln(1+\frac{1}{k^2}) = \frac{1}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^4}\right).$$

Samma jämförelsekriterium 2 ger att serien är konvergent om och endast om serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergerar. Eftersom den sista serien faktiskt konvergerar gör även den ursprungliga det.

2.a) I det här fallet gäller att

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos xy = 1.$$

Gränsvärdet är inte kritiskt, och vi får direkt med kvotregeln:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - \cos(xy) + y^2}{x^2 + \cos(xy) + y^2} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2) - \cos(xy)}{(x^2+y^2) + \cos(xy)} = \frac{0-1}{0+1} = -1.$$

b) I det här fallet observerar vi att

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{x^2 - \cos(xy) + y^2}{x^2 + \cos(xy) + y^2} =$$

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{1 - \dfrac{\cos(xy)}{x^2+y^2}}{1 + \dfrac{\cos(xy)}{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

Här har vi använt att $\lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{\cos(xy)}{x^2+y^2} = 0$, vilket följer av att $\left|\frac{\cos(xy)}{x^2+y^2}\right| \le \frac{1}{x^2+y^2} \to 0.$

3. a) Eftersom ekvationen är linjär så ligger det nära till hands att välja ett linjärt koordinatbyte. Det finns flera sådana som fungerar, men här nöjer vi oss med ett exempel: $u = x - y, v = x + y$. Om man inte vet vilket variabelbyte som man ska välja, så går det bra att välja ett variabelbyte av t ex typen $u = x + ay, v = y$, där man sedan kan bestämma ett värde på a så att endast en derivata blir kvar i ekvationen.

Vi räknar med kedjeregeln

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Insättning i ekvationen ger

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) + \left(-\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) + f = x + y,$$

vilket också kan skrivas som

$$2\frac{\partial f}{\partial v} + f = v \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{2}f = \frac{1}{2}v.$$

Efter multiplikation med den integrerande faktorn $e^{v/2}$ kan ekvationen skrivas som

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(e^{v/2} f\right) = \frac{1}{2} v e^{v/2},$$

eller ekvivalent

$$e^{v/2} f = \int \frac{1}{2} v e^{v/2}\, dv + \phi(u) = (v-2)e^{v/2} + \phi(u).$$

Om vi delar med $e^{v/2}$ och byter tillbaka till x, y-variablerna får vi

$$f(x,y) = (x+y-2) + \phi(x-y)e^{-(x+y)/2}.$$

b) Villkoret att funktionen ska vara noll på linjen $x + y = 0$ ger, om vi sätter $x = t, y = -t$ i formeln för lösningen i a):

$$0 = (t-t-2) + \phi(t-(-t))e^{-(t-t)} \Leftrightarrow \phi(2t) - 2 = 0.$$

Vi får alltså att $\phi(2t) = 2$ för alla värden på t. Detta ger den entydigt bestämda lösningen

$$f(x,y) = (x+y-2) + 2e^{-(x+y)/2}.$$

4. Vi visar att funktionen är obegränsad uppåt och neråt genom att undersöka gränsvärdena

$$\lim_{t\to\infty} f(t,-t,0) = \lim_{t\to\infty} (\ln(2t^2) + t^2) = +\infty,$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t,t,0) = \lim_{t\to\infty}(\ln(2t^2) - t^2) = -\infty$$

Det följer att varken max eller min antas, och att supremum och infimum är $+\infty$ och $-\infty$.

Vi beräknar de stationära punkterna:

$$\begin{cases} f'_x &= 3\frac{2x}{x^2+y^2+z^2} - y - z = 0, \\ f'_y &= 3\frac{2y}{x^2+y^2+z^2} - x - z = 0, \\ f'_z &= 3\frac{2z}{x^2+y^2+z^2} - x - y = 0. \end{cases}$$

Om vi drar den andra ekvation från den första, så får vi att

$$3\frac{2x-2y}{x^2+y^2+z^2} - y + x = 0,$$

vilket också kan skrivas som att

$$(x-y)\left(\frac{6}{x^2+y^2+z^2} + 1\right) = 0$$

Eftersom den andra faktorn uppenbarligen är strikt positiv så följer det att $x - y = 0$, dvs $x = y$. På samma sätt visas att $y = z$ och $x = z$, så vi kan dra slutsatsen att $x = y = z$. Insatt i valfri av ekvationerna får vi att

$$3\frac{2x}{3x^2} - 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1,$$

med rötterna $x \pm 1$. Detta ger de två stationära punkterna $(1,1,1)$ och $(-1,-1,-1)$.

För andraderivatorna fås

$$\begin{cases} f''_{xx} &= \frac{6\left(y^2+z^2-x^2\right)}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \\ f''_{yy} &= \frac{6\left(x^2+z^2-y^2\right)}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \\ f''_{zz} &= \frac{6\left(x^2+y^2-z^2\right)}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''_{xy} &= -\frac{12xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} - 1, \\ f''_{yz} &= -\frac{12yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} - 1, \\ f''_{xz} &= -\frac{12xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} - 1, \end{cases}$$

vilket i punkten $(1,1,1)$ ger

$$\begin{cases} f''_{xx}(1,1,1) &= \frac{2}{3}, \\ f''_{yy}(1,1,1) &= \frac{2}{3}, \\ f''_{zz}(1,1,1) &= \frac{2}{3}, \end{cases} \quad \begin{cases} f''_{xy}(1,1,1) &= -\frac{7}{3}, \\ f''_{yz}(1,1,1) &= -\frac{7}{3}, \\ f''_{xz}(1,1,1) &= -\frac{7}{3}. \end{cases}$$

Detta ger i punkten $(1,1,1)$ formen $Q(h,k,l)$

$$= \frac{2}{3}h^2 + \frac{2}{3}k^2 + \frac{2}{3}l^2 - \frac{14}{3}hk - \frac{14}{3}kl - \frac{14}{3}hl =$$

$$\frac{2}{3}(h^2 + k^2 + l^2 - 7hk - 7kl - 7hl) =$$

$$\frac{2}{3}\left(h - \frac{7}{2}k - \frac{7}{2}l\right)^2 - \frac{15}{2}k^2 - \frac{15}{2}l^2 - 21kl =$$

$$\frac{2}{3}\left(h - \frac{7}{2}k - \frac{7}{2}l\right)^2 - \frac{15}{2}\left(k^2 + l^2 + \frac{14}{5}kl\right) =$$

$$\frac{2}{3}\left(h - \frac{7}{2}k - \frac{7}{2}l\right)^2 - \frac{15}{2}\left(k + \frac{7}{5}l\right)^2 + \frac{36}{5}l^2.$$

Eftersom vi får termer med olika tecken är $(1,1,1)$ en sadelpunkt.

Insättning av punkten $(-1,-1,-1)$ i andradederivatorna ger exakt samma kvadratisk form, så även detta är en sadelpunkt.

5. Vi beräknar $\nabla f = (3x^2y^3, 3x^3y^2)$ och $\nabla g = (3x^2+6y, 3y^2+6x)$, där $g(x,y) = x^3+y^3+6xy-8$. Vi får

$$0 = \begin{vmatrix} 3x^2y^3 & 3x^3y^2 \\ 3x^2+6y & 3y^2+6x \end{vmatrix} =$$

$$9x^2y^5 + 18x^3y^3 - 9x^5y^2 - 18x^3y^3 = 9x^2y^2(y^3 - x^3).$$

Tre fall: $x = 0$, $y = 0$ och $x = y$. $x = 0$ ger insatt i bivillkoret $y = 2$. P s s ger $y = 0$ att $x = 2$. $x = y$ ger insatt i bivillkoret ekvationen $2x^3 + 6x^2 = 8 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 0$. Vi gissar omedelbart roten $x = 1$. polynomdivision ger $x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x^2+4x+4) = (x-1)(x+2)^2$ med rötterna $x = 1$ och $x = -2$, vilket ger punkterna $(1,1)$ och $(-2,-2)$.

Svar: $(0,2)$, $(2,0)$, $(1,1)$ och $(-2,-2)$.

För frågorna 6 och 7 hänvisas till kurslitteraturen

/Martin Tamm/220303/