MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik II Analys del A
13 oktober 2022

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng och minst 7,5 poäng på problemdelen krävs för att gå vidare till den muntliga delen.

Problemdel

1. Vilka av följande serier konvergerar? Vilka av följande serier konvergerar absolut?

$$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \qquad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{\ln(e+k^2)} \qquad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin\left(\frac{1}{k}\right).$$

2. (a) Visa att

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 \ln(x^4+y^4), \quad (x,y) \neq (0,0),$$

kan utvidgas till en kontinuerlig funktion på hela $\mathbb{R}^2$.

(b) Får denna utvidgning kontinuerliga partiella derivator i hela $\mathbb{R}^2$?

3. Bestäm samtliga stationära punkter till funktionen

$$f(x,y) = 17 + e^{x+y}(xy - x)$$

samt avgör deras karaktär.

4. (a) Förklara varför funktionen $f(x,y) = 2xy - 2y - 2$ antar ett största och ett minsta värde under bivillkoret $x^2 + 2y^2 = 2x$.

(b) Bestäm dessa värden samt ange i vilka punkter de antas.

5. Betrakta funktionen

$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{x+y+z}$$

på mängden $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x > 0, y > 0, z > 0\}$.

Vad är supremum för f på D? Vad är infimum för f på D?

Teoridel

6. Visa att $\sin x < x < \tan x$ om $0 < x < \pi/2$ samt att $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

7. Formulera och bevisa Cauchys integralkriterium.

Skrivningen beräknas vara rättad onsdag 19 oktober 2022. Se kurshemsidan för information om återlämning.