MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLM UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: S. Rodríguez-López

Tentamensskrivning i
Analys, del A
MM5010 7.5hp
240411

`Inga hjälpmedel tillåtna. Samtliga svar måste motiveras. Minst 7,5 poäng på problemdelen krävs för att gå vidare till den muntliga delen. Talen är inte ordnade efter svårighetsgrad. Skriv dina lösningar på separat papper.`

Problemdel

1. Avgör om följande serie och generaliserade integral är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent:

   (a) [**1 p**] $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(\arctan k)^2}$, (b) [**2 pt**] $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{2\sqrt{x}+x^5}\mathrm{d}x.$

   Facit.

   (a) Inte konvergent.

   (b) Absolutkonvergent.

2. [**3 pt**] Lös differentialekvationen

$$\sin y \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2}, \quad f(x,0) = x^2+2x+1,$$

   t.ex. genom att införa de nya variablerna $u = x + \cos y$ och $v = y$.

   Facit. Lösningen är

$$f(x,y) = \arctan y + (x+\cos y)^2.$$

3. För varje $\alpha \in \mathbb{R}$, låt $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara funktionen definierad av

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{xy^2}}{(2x^2+3y^2)^\alpha}, & \text{om } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{om } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) [**1 p**] Bestäm för vilka värden av α som funktionen f_α är kontinuerlig i $\mathbb{R}^2$.

   (b) [**1 p**] Bestäm för vilka värden av α som funktionen f_α är partiellt deriverbar i origo.

   (c) [**1 p**] Bestäm för vilka värden av α som funktionen f_α är differentierbar i origo.

   Facit.

   (a) Det gäller om, och bara om, $\alpha < 3/2$.

   (b) Det gäller för alla $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (c) Det gäller om, och bara om, $\alpha < 1$.

4. Betrakta funktionen $f(x,y) = -x^3 - 3xy + 6x - y^3 + 6y^2 - 12y + 5$.

   (a) [**2 p**] Hitta alla stationära punkter för denna funktion, och bestäm, för varje av dessa, den associerade kvadratiska formen.

(b) **[1 p]** Bestäm om de stationära punkterna är lokala maxima, minima eller sadelpunkter.

Facit.

(a) Det finns två stationära punkter

$$p_1 = (-1, 1) \qquad p_2 = (0, 2).$$

Den respektiva associerade kvadratiska formerna blir

$$Q_{p_2}(h,k) = -6kh \qquad Q_{p_1}(h,k) = 6h^2 - 6hk + 6k^2.$$

(b) Punkten p_2 är en sadelpunkt och p_1 ett lokalt minimipunkt.

5. Låt $g(x,y) = (x^2+y^2)^3 - 8xy$ och $f(x,y) = x+y$.

(a) **[1 p]** Bevisa att

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} g(x,y) = +\infty,$$

och bevisa från det att varje nivåkurva av g är kompakta.

(b) **[2 p]** Visa att funktionen $f(x,y) = x+y$ antar största och minsta värde på kurvan

$$(x^2+y^2)^3 - 8xy = 48,$$

och bestäm de största och minsta värdena.

Facit.

(a) Eftersom $|xy| \leq x^2+y^2$ har vi att

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} \left((x^2+y^2)^3 - 8xy\right) \geq \lim_{x^2+y^2\to\infty} \left((x^2+y^2)^3 - 8(x^2+y^2)\right) = \lim_{r\to\infty} \left(r^6 - 8r^2\right) = +\infty.$$

Givet $C \in \mathbb{R}$, det finns $s > 0$ sådan för alla $x^2+y^2 > s$ gäller då att

$$g(x,y) > C.$$

Därför, gäller då att

$$\{(x,y) : g(x,y) = C\} \subset \{(x,y) : x^2+y^2 \leq s\}.$$

Så är nivåkurvor av g begränsad och slutet ty g är kontinuerlig .

(b) Funktionen f är kontinuerlig, och vi har visat att mängden

$$M := \{(x,y) : g(x,y) = 48\}$$

är en kompakt mängd. Då gäller att funktionen f antar sitt största och minsta värde i mängden M.

Maximivärdet är lika med $2\sqrt{2}$ och minimivärde är lika med $-2\sqrt{2}$.

Teoridel

6. **[3 p]** Formulera och bevisa Cauchys rotkriterium och d'Alemberts kvotkriterium för serier.

7. **[3 p]** Definiera riktningsderivata och gradient. Visa att en funktion av två variabler växer snabbast i gradientens riktning.