

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivering krävs i varje uppgift. Varje uppgift är värd 5 poäng och minst 15 poäng, varav minst 5 från teorifrågorna, krävs för godkänt

1. (a) Vilka av följande serier konvergerar? Vilka av följande serier konvergerar absolut? (3p)

$$(i) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{e^{k^2} - 1} \quad (ii) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k + \sqrt{k}} \quad .$$

- (b) Avgör huruvida följande generaliserade integral är konvergent. (2p)

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{2x \ln x}$$

2. **(Teori)** (a) Vad menas med att en funktion $f(x, y)$ är differentierbar i en punkt (a, b) ? (1p)
(b) Avgör huruvida gränsvärdet

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x(x+y+x^3)+2y^2}{x^2+xy+y^2}$$

existerar. (3p)

- (Teori)**(c) Är funktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x(x+y+x^3)+2y^2}{x^2+xy+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2024, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

differentierbar i origo? (1p)

3. Bestäm samtliga stationära punkter till funktionen

$$f(x, y) = (x - y)^3(x + y)$$

samt avgör deras karaktär. (5p)

4. **(Teori)** (a) Antar funktionen $f(x, y) = 4xy - 1$ ett största och ett minsta värde under bivillkoret $x^2 + y^2 = 2x$? (1p)

(b) Bestäm det största värdet och det minsta värdet till $f(x, y) = 4xy - 1$ under bivillkoret ovan samt ange i vilka punkter dessa värden antas. (4p)

5. **(Teori)** (a) Vad menas med att en funktion $f(x, y)$ är uppåt begränsad? Vad menas med att en funktion är nedåt begränsad? Vad menas med att en funktion är begränsad? (2p)

(b) Betrakta funktionen

$$f(x, y) = \frac{xy}{|x| + |y|}$$

på mängden $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y < 0\}$.

Är f uppåt begränsad på D ? Är f nedåt begränsad? Är f begränsad? (3p)

6. **(Teori)** (a) Definiera begreppet egentligt gränsvärde i oändligheten. (1p)

(Teori) (b) Definiera begreppet monoton funktion. (1p)

(Teori) (c) Visa, utgående från supremumaxiomet, att en begränsad monoton funktion har ett egentligt gränsvärde då $x \rightarrow \infty$. (3p)