MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik II Analys del A
13 december 2024

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivering krävs i varje uppgift. Varje uppgift är värd 5 poäng och minst 15 poäng, varav minst 5 från teorifrågorna, krävs för godkänt

1. Vilka av följande generaliserade integraler konvergerar?

$$(a) \int_0^2 \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} \quad (b) \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx \quad (c) \int_0^\infty \frac{2dx}{x^2+x}$$

Lösningsförslag:

(a) Denna integral är generaliserad i origo. Vi beräknar därför, för $0 < \epsilon < 2$,

$$\int_\epsilon^2 \frac{dx}{x^{3/2}} = [-2x^{-\frac{1}{2}}]_\epsilon^2 = 2(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} - \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Vi ser nu att $\lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^2 \frac{dx}{x^{3/2}}$ ej existerar, varför den generaliserade integralen är divergent.

(b) Vi observerar att $\sin^2 x \leq 1$ för $x \in \mathbb{R}$. Detta ger i sin tur att

$$\int_0^R \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx \leq \int_0^R \frac{dx}{1+x^2} = \arctan R$$

för varje $R > 0$. Eftersom $\lim_{R\to\infty} \arctan R = \frac{\pi}{2}$ ger jämförelsekriterium I för generaliserade integraler att även $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx$ är konvergent.

(c) Denna integral är generaliserad både i origo och i oändligheten. Den givna integranden är vidare positiv. För att dra slutsatsen att den generaliserade integralen divergerar räcker det att visa att $\int_0^1 \frac{2dx}{x^2+x}$ är divergent. Vi har, för $x \leq 1$, $x^2 + x \leq 2x$, och därmed gäller för $\epsilon > 0$ att

$$\int_\epsilon^2 \frac{dx}{x} \leq \int_\epsilon^1 \frac{2dx}{x^2+x}.$$

Eftersom $\int_\epsilon^1 \frac{dx}{x} = \log \frac{1}{\epsilon} \to \infty$ när $\epsilon \to 0$ är även $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x}$ divergent, och därmed divergerar integralen i (c).

2. **(Teori)** (a) Vad menas med att en funktion $f(x, y)$ är partiellt deriverbar i en punkt (a, b)? (1p)

(b) Avgör huruvida gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^2+y^3}$$

existerar. (2p)

(c) Är funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^2}{x^2+y^3}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

partiellt deriverbar i origo? (2p)

Lösningsförslag: *(a) Se kursboken PB2, s. 46-47, för denna definition.*

(b) Vi har $f(0,y) = 0$ för $y \neq 0$. Å andra sidan antar f godtyckligt stora och godtyckligt små värden nära origo då nämnaren är noll längs kurvan $y^3 = -x^2$. Således existerar det givna gränsvärdet ej.

(c) Vi har $f(0,y) = 0$ och $f(x,0) = 0$ vilket tillsammans med $f(0,0)$ ger att f är partiellt deriverbar i origo med $\partial_x f(0,0) = \partial_y(0,0) = 0$.

3. Bestäm samtliga stationära punkter till funktionen

$$f(x,y) = x^2 + xy - 2x$$

samt avgör deras karaktär. (5p)

Lösningsförslag:

Funktionen f ges av ett polynom i två variabler och är således överallt godtyckligt många gånger deriverbar. Vi undersöker därför punkter där de partiella derivatorna är lika med noll. Eftersom $\nabla f = (2x + y - 2, x)$ är noll när $(x,y) = (0,2)$ har vi endast en stationär punkt.

Vi har vidare

$$\partial^2_{xx} f = 2, \quad \partial^2_{xy} f = 1, \quad \partial^2_{yy} f = 0$$

vilket betyder att den kvadratiska formen hörande till f är oberoende av valet av punkt. Vi har

$$Q(h,k) = 2(h^2 + hk),$$

vilket vi genast kan identifera som en indefinit form.

4. **(Teori)** (a) Definiera begreppen (i) begränsad mängd, (ii) sluten mängd samt (iii) kompakt mängd i $\mathbb{R}^2$. (3p)

(b) Antar funktionen $f(x,y) = x^3y - y^2$ ett största och ett minsta värde under bivillkoret $x^3 + y^4 = 0$? (2p)

Lösningsförslag:

(a) Se kursboken PB2, s. 13-15, för dessa definitioner.

(b) Vi noterar att bivillkoret ej beskriver en begränsad mängd. Bivillkoret kan skrivas på formen $x^3 = -y^4$. Sätter vi in detta uttryck för x i den givna funktionen erhålls

$$f(x,y) = -y^5 - y^2 = -y^2(y^3 + 1).$$

Faktorn y^2 är icke-negativ för alla $y \in \mathbb{R}$. Om $y > 0$ är även $y^3 + 1 > 0$ och vi har $\lim_{y \to +\infty} -y^2(y^3 - 1) = -\infty$. Således antar funktionen f inget minsta värde under det givna bivillkoret.

Om $y < -1$ gäller att $y^3 + 1 < 0$. Vi har därmed

$$\lim_{y \to -\infty} -y^2(y^3 + 1) = +\infty$$

vilket medför att f inte heller antar ett största värde.

Vi drar slutsatsen att $f(x,y) = x^3y - y^2$ varken antar ett största eller ett minsta värde under bivillkoret $x^3 + y^4 = 0$.

5. **(Teori)** Definiera begreppet supremum och infimum för en funktion $f(x,y,z)$ av tre variabler. (1p)

(b) Betrakta funktionen

$$f(x,y) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

på mängden $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x > 0, y > 0, z^3 = 1\}$.

Bestäm supremum och infimum för f på D. (3p)

Lösningsförslag:

(a) Se Kompletteringskompendium 1 för definitioner av supremum och infimum.

(b) Vi observerar först att ekvationen $z^3 = 1$ *har en entydig lösning i* $z = 1$. *Därmed kan vi skriva* $D = \{(x, y, 1) \colon x > 0, y > 0\}$. *Insättning av en allmän punkt i* D *i den givna funktionen ger oss uttrycket*

$$f(x, y, 1) = \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Vi ser genast att f *är positiv påden givna mängden* D. *Om* $x > 0$ *och* $y = x^2$ *så tillhör* (x, y) *mängden* D, *och längs med denna kurva har vi*

$$\lim_{x \to 0} f(x, x^2, 1) = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2 + x^4 + 1} = 0.$$

Därmed fås att $\inf_D f(x, y, z) = 0$.

I polära koordinater $x = r\cos\theta$ *och* $y = r\sin\theta$ *har vi*

$$f(x, y, 1) = \frac{r^2 \sin\theta\cos\theta}{r^2 + 1} = \frac{r^2 \sin(2\theta)}{2(r^2 + 1)}$$

och i D *gäller* $r > 0$ *samt* $0 < \theta < \pi/2$. *Vi har speciellt att* $f(x, y) \leq \frac{1}{2}$. *Vidare maximeras täljaren för fixt* r *när* $\theta = \pi/4$, *det vill säga längs diagonalen i första kvadranten. Vi får*

$$f(x, x, 1) = \frac{x^2}{2x^2 + 1}$$

och eftersom $\lim_{x \to \infty} f(x, x, 1) = \frac{1}{2}$ *gäller att* $\sup_D f = \frac{1}{2}$.

6. **(Teori)** (a) Definiera begreppet konvergent serie. (1p)

   (b) Definiera begreppet absolutkonvergent serie. (1p)

   (c) Visa att om en serie med reella termer konvergerar absolut, så är serien konvergent. (3p)

   Lösningsförslag:

   (a) Se Kompletteringskompendium II, Def. 1.

   (b,c) Se Kompletteringskompendium II, Avsnitt 5.