MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLM UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: S. Rodríguez-López

Tentamensskrivning i
Analys, del A
MM5010 7.5hp
250317

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivering krävs i varje uppgift. Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.
För att få full poäng behöver du, om det är möjligt, referera vid namn till **alla** satser du använder när du använder dem, och uttryckligen nämna vilka fortsättningar du använder för att satsen ska vara uppfylld.

Skriv dina lösningar för varje uppgift (1-6) på separata papper. Deluppgifter ((a),(b),..) kan skrivas på samma papper.

Varje uppgift är värd 5 poäng och minst 15 poäng, varav minst 5 från teorifrågorna, garanterar godkänt betyg. Förutsatt att du får minst 5 poäng från teoridelen, garanterar minst 15 poäng betyget E, 18 betyget D, 21 betyget C, 24 betyget B och 27 betyget A.

Problemdel

1. (a) [**1p**] Visa att det finns ett tal $\xi \in [0,2]$ sådan att $\int_0^2 e^{x^2} dx = 2e^{\xi^2}$.

   (b) [**1p**] Ge ett fullständigt argument för att visa att det finns en reell lösning till ekvationen $x^3 - 4x^2 + 3x + 3 = 0$.

   (c) Talföljden $\{x_n\}_{n\geq 1}$ definieras rekursivt av

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{3x_n + 1}{x_n + 3}, \quad \text{för } n \geq 1.$$

   (i) [**1p**] Visa att $0 \leq x_n \leq 1$ för alla $n \geq 1$.

   (ii) [**2p**] Visa att talföljden $\{x_n\}_{n\geq 1}$ konvergerar och bestäm dess gränsvärde.

Facit.

(a) Observera att funktionen $x \mapsto e^{x^2}$ är kontinuerlig i intervallet $[0,2]$ och använd Integralkalkylens medelvärdessatser.

(b) Observera att funktionen är kontinuerlig i $\mathbb{R}$ och använd den mellanliggande värden sats på intervallet $[-1,0]$.

(c) i. Visa med induktion att olikheten gäller, så är talföljden begränsad.

ii. Visa att talföljden är växande, och använd den monotona konvergensprincipen för att visa att gränsvärdet existerar och det ligger mellan 0 och 1. Om vi kallar det för l, och man tar då gränsvärdet, fås att det uppfyller ekvationen

$$l = \frac{3l+1}{l+3}.$$

som medför att det är lika med 1.

2. (a) **[1p]** Undersök om den generaliserade integralen

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

konvergerar.

(b) **[2p]** Bestäm för vilka värden på $\alpha > 0$ serien

$$\sum_{k\geq 1}\left(\frac{\alpha k+1}{k+4}\right)^k$$

divergerar.

(c) Låt $\{a_n\}_{n\geq 1}$ vara sådan att $a_n > 0$, för alla $n \geq 1$.

i. **[1p]** Visa utifrån räknelagar för gränsvärden att, om $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = 0$, så gäller att $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

ii. **[1p]** Visa att serien $\sum_{n\geq 1} a_n$ konvergerar om serien $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{1+a_n}$ konvergerar.

Facit.

(a) Integrand är positivt inom integrationsintervallet, och sammansatsningslagen för gränsvärden och standardgränsvärden ger att

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sin(x^{-2})}{x^{\frac{1}{2}}}}{\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}} = 1,$$

Jämförelsekriteriet II för integraler ger att integralen konvergerar.

(b) i. Skriv om uttrycket som

$$\frac{a_n}{1+a_n} = 1 - \frac{1}{1+a_n},$$

och använd additionslager, kvotlagen och additionslager igen för att visa att $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Alternativ 1: Notera att, om $y_n = \frac{a_n}{1+a_n}$ gäller det att $0 < y_n < 1$ och att

$$a_n = \frac{y_n}{1-y_n} = f(y_n),$$

där $f(x) = \frac{x}{1-x}$ som är kontinuerlig i $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Resultaten följer då från Sammansättningslagen.

Alternativ 2: Man kunde lösa uppgiften från definitionen av gränsvärdet. Faktiskt, för alla $\varepsilon > 0$ som $\varepsilon < 1$, finns det $n_0 \in \mathbb{N}$ sådan att, för alla $n \geq n_0$ gäller det att

$$0 < \frac{a_n}{a_n+1} < \varepsilon.$$

Notera dock att för dessa n gäller då att

$$0 < a_n < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Anmärkning: Man måste visa först att gränsvärdet $\lim_n a_n$ existerar om man vill använda kvotlagen. Så det är inte en korrekt argument skriva

$$0 = \lim_n \frac{a_n}{a_n+1} = \frac{\lim_n a_n}{1+\lim_n a_n} \Rightarrow \lim_n a_n = 0,$$

utan att bevisa först att $\lim_n a_n$ existerar.

ii. Använd Jamförelsekriteriet II för positiva serier.

(c) Serien är positiva. Eftersom

$$\lim_{k} \frac{\alpha k + 1}{k + 4} = \alpha,$$

Rotkriterium ger att serien konvergerar om $\alpha < 1$, och divergerar för $\alpha > 1$. Om $\alpha = 1$, gäller då att

$$\left(\frac{k+1}{k+4}\right)^k = \left(1 + \frac{(-3)}{k+4}\right)^k \to e^{-3} \neq 0, \quad k \to +\infty,$$

eftersom

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(-3)k}{k+4} = -3.$$

Då divergerar serien för $\alpha \geq 1$.

3. För varje $\alpha \in \mathbb{R}$, låt $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara funktionen definierad av

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} (1-\cos(xy^2))\,(x^2+y^2)^\alpha, & \text{om } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{om } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) **[2p]** Bestäm för vilka värden av α som funktionen f_α är kontinuerlig i $\mathbb{R}^2$.

(b) **[1p]** Bestäm för vilka värden av α som funktionen f_α är partiellt deriverbar i origo.

(c) **[2p]** Bestäm för vilka värden av α som funktionen f_α är differentierbar i origo.

Facit.

(a) Funktionen är kontinuerlig i $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eftersom det kan skrivas som produkt av termer, som i för sig, är sammansättningen av kontinuerliga funktioner.

För att studera kontinuitet i origo behöver vi att studera existens av

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_\alpha(x,y).$$

En variabelbyte till polära koordinater, och standardgränsvärdet visar att det gränsvärdet existera och det är lika med noll, om och endast om, $\alpha > -3$.

(b) Notera att, för alla $\alpha \in \mathbb{R}$, f_α är väl definierad i en punkterad området av origo. Dessutom gäller det att

$$\frac{\partial}{\partial x} f_\alpha(0,0) := \lim_{x\to 0} \frac{f_\alpha(x,0) - f_\alpha(0,0)}{x} = 0,$$

och likadan visas att $\frac{\partial}{\partial y} f_\alpha(0,0) = 0$. Så är f_α partiellderiverbar i origo för alla $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) Funktionen f_α är differentierbar i origo om, och bara om

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f_\alpha(x,y)}{(x^2+y^2)^{1/2}} = 0.$$

Omskrivning av uttrycket i polära koordinater, och användingen av standardgränsvärden visas att det gäller om, och bara om, $\alpha > -5/2$.

4. Betrakta funktionen

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$$

(a) **[2p]** Bestäm samtliga stationära punkter för denna funktion och avgör om de är lokala maximipunkter, lokala minimipunkter eller sadelpunkter.

(b) **[3p]** Bestäm de absoluta extremvärderna för funktionen f på <u>cirkeln med radie 2 centrerad i origo.</u>

Facit.

(a) Partiella derivator blir

$$\partial_x f(x,y) = 3x^2 - 3y^2, \qquad \partial_y f(x,y) = -6xy,$$

som har $(0,0)$ som sin endast stationär punkt.

Dem andra ordning partiella derivator blir

$$\partial^2_{xx} f(x,y) = 6x, \quad \partial^2_{xy} f(x,y) = -6y, \quad \partial^2_{yy} f(x,y) = -6x.$$

Den associerad quadratisk form blir då noll.

Notera dock att

$$f(t,t) = -2t^3,$$

så för godtyckliga nära punkter till $(0,0)$ antar f både positiva och negativa värden. Så är $(0,0)$ en sadelpunkt.

(b) Cirkeln med radie 2 centrerad i origo, som är en kompakt mäng, kan beskrivas som

$$\{(x,y) : g(x,y) = 0\},$$

där $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$.

Vi noterar att ∇f och ∇g är parallella om, och endast om

$$0 = \det\begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 & 2x \\ -6xy & 2y \end{pmatrix} \Leftrightarrow 6y(3x^2 - y^2) = 0.$$

Det och bivillkoret ger den 6 möjliga lokala extrempunkter

$$(\pm 2, 0), \quad \pm(1, \pm\sqrt{3}),$$

med resp. värden

(x_0,y_0)	$f(x_0,y_0)$
$(2,0)$	8
$(-2,0)$	-8
$(1,\pm\sqrt{3})$	-8
$(-1,\pm\sqrt{3})$	8

ps. Notera att, i det fall, kunde vi reducera problemet att studera den envariabelfunktion

$$h(x) = x^3 - 3x(4 - x^2) = 4x^3 - 12x, \qquad \text{för } x \in [-2,2].$$

Teoridel

5. (a) **[1p]** Definiera begreppet (egentligt) gränsvärde av en envariabelfunktion $f(x)$ då $x \to -\infty$.

   (b) **[1p]** Definiera begreppet infimum för en icke tom delmängd $M \subset \mathbb{R}$.

   (c) **[1p]** Definiera begreppen inre punkt och randpunkt för en mängd $M \subset \mathbb{R}^n$, där $n \geq 1$.

   (d) **[2p]** Formulera och bevisa en sats i kursen där Intervallinkapslingssatsen används i beviset.

Facit.

(a) Se Kap. 2 i [PB1].

(b) Se Appendix A3 i [PB2].

(c) Se Definition 1 i Kap. 1.3 i [PB2].

(d) Man kan välja t.ex. den Mellanliggande värdens satsen, eller Weierstrass satsen.

6. (a) **[1p]** Bevisa utifrån definitionen av kontinuitet att om $f : D \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i en punkt $a \in D$ och $f(a) > 0$, så finns det ett tal $r > 0$ sådant att $f(x) > 0$ för alla $x \in D$ som uppfyller $|x - a| < r$.

(b) **[2p]** Bevisa följande version av principen om monoton konvergens:

> Låt $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ vara en begränsad och avtagande funktion. Då existerar gränsvärdet
> $$\lim_{x \to b^-} f(x) \in \mathbb{R}.$$

(c) **[2p]** Bevisa utifrån definitionen av under- och överintegral att för alla begränsade funktioner $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gäller

$$-\infty < \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Facit.

(a) Låt $\varepsilon = \frac{f(a)}{2} > 0$ och använd definitionen.

(b) Kolla Sats 6 i [K1], och förklaringen före det (ink. Hjälpsats 1).

(c) Kolla Sats 3 i [K1].