

---

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivering krävs i varje uppgift. Uppgifter är inte ordnade efter svårighetsgrad.

För att få full poäng behöver du, om det är möjligt referera vid namn till **alla** satser du använder när du använder dem, och uttryckligen nämna vilka förutsättningar du använder för att satsen ska vara uppfylld.

Skriv dina lösningar för varje uppgift (1-6) på separat papper. Deluppgifter ((a),(b),...) kan skrivas på samma papper.

Varje uppgift är värd 5 poäng och minst 15 poäng, varav minst 5 från teorifrågorna, krävs för godkänt. Förutsatt att du får minst 5 poäng från teoridelen, garanterar minst 15 poäng betyget E, 18 betyget D, 21 betyget C, 24 betyget B och 27 betyget A.

---

### Problemdel

1. Vilka av följande serier konvergerar? Vilka av följande serier konvergerar absolut? Vilka divergerar?

(a) [1p]  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2k^2-1}$       (b) [2p]  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$       (c) [2p]  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$ .

### Facit.

Kolla gärna listan av rekommenderade uppgifter.

- (a) Serien är positiva. Jämförelsenkriterium I ger att serien divergerar.  
(b) Serien konvergerar, men det är inte absolutkonvergent.  
(c) Serien är positiva och divergent.

2. (a) [3p] Transformera differentialekvationen

$$2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

till nya variabler  $u, v$ , där  $u = x - ky$ ,  $v = x + ky$  och  $k \neq 0$  är ett tal. Välj  $k$  lämpligt för att hitta lösningen som uppfyller att

$$f(x, 0) = \sin x.$$

- (b) [1p] Låt  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vara en funktion av klass  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ . Visa att, om  $f$  har 2025 nollställen, måste  $f'$  ha minst 2024 nollställen.
- (c) [1p] Låt  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  vara en kontinuerlig funktion sådan att dess värdemängden är  $[0, 2]$ . Visa att det finns ett tal  $x_0 \in [0, 1]$  sådant att  $f(x_0) - 2x_0 = 0$ .

**Facit.**

- (a) Vi får

$$0 = 2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = (2-k)\frac{\partial f}{\partial u} + (2+k)\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Om vi väljer  $k = 2$ , får vi att lösningen är  $f(x, y) = \sin(x - 2y)$ . Kolla gärna Uppgiften 2.21 i [ÖPB2].

- (b) Mellan två konsekutiva nollställen finns det en punkt där derivatan är noll enligt Medelvärdesatsen.

- (c) Antagandet ger oss att det finns  $x_1, x_2 \in [0, 1]$  sådana  $f(x_1) = 0$  och  $f(x_2) = 2$ . Så kan vi använda Mellanliggandesatsen till den kontinuerliga funktionen  $g(x) = f(x) - 2x$ .

3. (a) Avgör karaktären (positivt/negativt definit; positivt/negativt semidefinit eller indefinit) av följande kvadratiska former:
- [1p]  $Q_1(x, y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2$
  - [1p]  $Q_2(x, y, z) = -6x^2 + 4xy + 2y^2 - 2xz + 4yz + z^2$ .
- (b) Bestäm om följande mängder är begränsade respektive i  $\mathbb{R}^2$  och  $\mathbb{R}^3$ :
- [1p]  $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : Q_1(x, y) = 16\}$ ;
  - [1p]  $C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : Q_2(x, y, z) = 1\}$
- (c) [1p] Bestäm det minsta avståndet från  $C_1$  till origo.

**Facit.**

- (a) i. Positivt definit.  
ii. Indefinit.
- (b) i. Begränsad.  
ii. Obegränsad: T.ex. Notera att

$$1 = Q_2(x, x, z) = (z+x)^2 - 5x^2 \Leftarrow z(x) = -x + \sqrt{1+5x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

och

$$|(x, x, z(x))| \geq |x|.$$

- (c) Det finns 4 möjliga extrempunkter:

$$\pm(1, 1), \quad \pm(2, -2).$$

Det minsta avståndet till origo är  $\sqrt{2}$ .

*Var god vänd!*

4. Betrakta en funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  som är kontinuerlig och uppfyller:

- $f(a\mathbf{x}) = a^2 f(\mathbf{x})$ , för alla  $a \in \mathbb{R}$  och  $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
- $f(\mathbf{x}) > 0$ , för alla  $\mathbf{x} \neq (0, 0)$ ,  $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

- (a) [1p] Beräkna  $f(0, 0)$ .
- (b) [1p] Visa att det finns ett tal  $m > 0$  sådant att  $f(\mathbf{x}) \geq m|\mathbf{x}|^2$  för alla  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ .
- (c) [1p] Visa att  $f$  är partiellt deriverbar i origo.
- (d) [2p] Måste  $f$  vara differentierbar i origo? Om du svarar *Ja*, bevisa det. Om du svarar *Nej*, ge ett motexempel.

**Facit.**

- (a) i. Notera att  $f(0, 0) = f(0(0, 0)) = 0^2 f(0, 0) = 0$ .
- ii. Funktionen  $\theta \mapsto f(\cos \theta, \sin \theta)$  definierad i  $[0, 2\pi]$  har ett positivt minimivärde ty  $[0, 2\pi]$  är kompakt och  $f$  är kontinuerlig. Låt  $m$  vara det värdet. Så, för alla  $\mathbf{x} \neq 0$  gäller att

$$f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2 f\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right) \geq m|\mathbf{x}|^2.$$

Olikheten gäller också för  $\mathbf{x} = 0$ . Se också kurslitteratur (§2.6, Lemma 1 i [PB2]).

- (b) Notera att

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 f(1, 0)}{h} = 0,$$

så gäller det att  $\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) = 0$ . En liknande argument visar att

$$\frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) = 0.$$

Så är  $f$  partiellt deriverbar i origo.

- (c) Med hjälp av polära koordinater visas

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

så gäller det att  $f$  är differentierbar i origo.

## Teoridel

5. (a) [1p] Låt  $M \subset \mathbb{R}$ , och  $a \in \mathbb{R}$ . Vilket begrepp karakteriseras av följande två egenskaper:
- i.  $a \leq x$ , för alla  $x \in M$ ;
  - ii. till varje  $b > a$  finns ett element  $x \in M$  sådant att  $x < b$ .
- (b) i. [1p] Formulera, utan bevis, Bolzano–Weierstrass sats.
- ii. [1p] Kan det finnas ett exempel på en följd som inte har någon konvergent delföljd? Om svaret är *Nej*, motivera ditt svar. Om svaret är *Ja*, ge ett exempel.
- (c) [2p] Definiera begreppet (oegentligt) gränsvärde

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty,$$

där  $f$  är en envariabelfunktion definierad i intervallet  $(0, 1)$ .

### Facit.

- (a) Punkten  $a$  är infimum för mängden  $M$ . Se [PB2, s. 417].
- (b) i. Se kurslitteratur.
- ii. Ja. T.ex.

$$x_n := n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alla delföljd  $\{x_{n(k)}\}_k$  uppfyller att

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n(k)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} n(k) = +\infty.$$

- (c) Se kurslitteratur [PB1, s. 135].

6. (a) [1p] Definiera begreppet supremum och infimum för en funktion  $f(x,y,z)$  av tre variabler.
- (b) [2p] Låt  $M \subset \mathbb{R}$ . Om  $\inf M = a \in \mathbb{R}$  bevisa att det finns en följd  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  med  $x_n \in M$  sådan att  $x_n \rightarrow a$  då  $n \rightarrow \infty$ .
- (c) [2p] Bevisa direkt utifrån definitionen av överintegral att om  $f, g$  är två begränsade funktioner definierade på  $[a, b]$  sådana att  $f(x) \leq g(x)$  för alla  $x \in [a, b]$ , så gäller

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} \leq \overline{\int_a^b g(x) dx} < +\infty.$$

**Facit.**

- (a) Se kurslitteratur.
- (b) Använd Uppgift 5.a, med  $b = a + \frac{1}{n}$ , för  $n \geq 1$ . Kolla gärna listan av rekommenderade uppgifter.
- (c) Se kurslitteratur.