

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivering krävs i varje uppgift. Varje uppgift är värd 5 poäng och minst 15 poäng, varav minst 5 från teorifrågorna, krävs för godkänt

1. Avgör om följande serier konvergerar, och ange vid konvergens seriens summa.

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k+1} \quad (b) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k \ln k} \quad (c) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k} \quad (1p \text{ på (a), 2p var på (b) och (c)})$$

2. **(Teori)** (a) Vad menas med att en funktion $f(x, y)$ är differentierbar i en punkt (a, b) ? (1p)
(b) Avgör huruvida gränsvärdet

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2 + 2xy^2}{x^2 + y^4}$$

existerar. (2p)

- (c) Är funktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2 + 2xy^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

differentierbar i origo? (2p)

3. Bestäm samtliga stationära punkter till funktionen

$$f(x, y) = 2xye^{x+y} + 1$$

samt avgör deras karaktär. (5p)

4. **(Teori)** (a) Definiera begreppen (i) begränsad mängd, (ii) sluten mängd samt (iii) kompakt mängd i $\mathbb{R}^2$. (3p)
(b) Antar funktionen $f(x, y) = x^6y + y^4 - y^2$ ett största och ett minsta värde under bivillkoret $x^3 - y^4 = 0$? (2p)
5. **(Teori)** (a) Definiera begreppet supremum och infimum för en funktion $f(x, y)$ av två variabler. (1p)
(b) Betrakta funktionen

$$f(x, y) = \frac{x|y|}{x^2 + |y|}$$

på mängden $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, -x^2 < y < x^2\}$.

Bestäm supremum och infimum för f på D . (4p)

6. **(Teori)**

- (a) Definiera begreppen konvergent serie och generaliserad integral i oändligheten. (1p)
(b) Formulera och bevisa Cauchys integralkriterium. (3p)
(c) Ge ett exempel på en kontinuerlig funktion f sådan att den generaliserade integralen av f på $[1, \infty)$ är divergent, medan $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ är konvergent. (1p)