

Instruktioner för de som skrivit kontrollskrivningar hösten 2025:

Under höstens tre kontrollskrivningar kunde man få maximalt 30 poäng.

- Om du fått totalt minst 8 poäng kan du hoppa över deluppgift 1 (a).
- Om du fått totalt minst 16 poäng kan du hoppa över deluppgifter 1 (a) och 1 (b).
- Om du fått totalt minst 24 poäng kan du hoppa över hela uppgift 1.

Inga hjälpmedel är tillåtna. Kom ihåg att ge fullständiga motiveringar för dina lösningar!

- Ge ett exempel på en funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (dvs. med definitionsmängd $D_f = \mathbb{R}$) som är diskontinuerlig i punkterna $x = 0$ och $x = 1$, men är kontinuerlig i alla andra punkter. (1p)
 - Ge ett exempel på en funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (dvs. med definitionsmängd $D_f = \mathbb{R}$) som saknar både egentligt och oegentligt gränsvärde då $x \rightarrow \infty$. (1p)
 - Ge ett exempel på en funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (dvs. med definitionsmängd $D_f = \mathbb{R}^2$) som inte har några stationära punkter. (1p)
- Vilka av följande serier konvergerar? Vilka av följande serier är absolutkonvergenta?

$$(i) \sum_{k=1}^{\infty} k^3 e^{-k} \quad (2p) \qquad (ii) \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2 + 1}{k^4 - 1} \quad (2p)$$

- Är följande generaliserade integral konvergent eller divergent? (2p)

$$\int_2^{\infty} \frac{x+3}{x^2-1} dx$$

- (**Teori**) Definiera egentligt gränsvärde i oändligheten för en funktion $f(x)$. (1p)
 - (**Teori**) Formulera instängningssatsen för gränsvärden då $x \rightarrow \infty$. (1p)
 - (**Teori**) Bevisa instängningssatsen för gränsvärden då $x \rightarrow \infty$. (3p)

- Betrakta funktionen

$$f(x, y) = (1 + x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)},$$

för alla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- Antar funktionen f ett största värde? Om ja: I vilken eller vilka punkter? (2p)
- Antar funktionen f ett minsta värde? Om ja: I vilken eller vilka punkter? (1p)
- Bestäm $\inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y)$? (1p)
- (**Teori**) Antar funktionen ett minsta värde under bivilkoret $x^2 + y^2 \leq 10^{10}$? (1p)

Var god vänd blad!

5. Betrakta mängden

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}.$$

(a) **(Teori)** Är M sluten? Förklara! (1p)

(b) **(Teori)** Är M kompakt? Förklara! (1p)

(c) Har funktionen

$$f(x, y) = 1 - x - y$$

ett största och ett minsta värde i M under bivillkoret $x^2 + y^2 = 1$? I vilka punkter i sådana fall? (4p)

6. (a) **(Teori)** Definiera vad det innebär att gränsvärdet för en funktion $f(x, y)$ existerar i en punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. (1p)

(b) **(Teori)** Definiera vad det innebär att en funktion $f(x, y)$ är differentierbar i en punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. (1p)

(c) Existerar gränsvärdet för

$$\frac{\sin^2(xy)}{x^2 + y^2}$$

när $(x, y) \rightarrow (0, 0)$? (3p)