

Instruktioner för de som skrivit kontrollskrivningar hösten 2025:

Under höstens tre kontrollskrivningar kunde man få maximalt 30 poäng.

- Om du fått totalt minst 8 poäng kan du hoppa över deluppgift 1 (a).
- Om du fått totalt minst 16 poäng kan du hoppa över deluppgifter 1 (a) och 1 (b).
- Om du fått totalt minst 24 poäng kan du hoppa över hela uppgift 1.

Inga hjälpmedel är tillåtna. Kom ihåg att ge fullständiga motiveringar för dina lösningar!

1. (a) Ge ett exempel på en funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (dvs. med definitionsmängd $D_f = \mathbb{R}$) som är diskontinuerlig i punkterna $x = 0$ och $x = 1$, men är kontinuerlig i alla andra punkter. (1p)

Lösningsförslag: Funktionen

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 1, \\ 2, & x > 1, \end{cases}$$

är definierad för alla $x \in \mathbb{R}$ och är uppenbart kontinuerlig där $x \neq 0, 1$. Dessutom har vi följande höger- och vänstergränsvärden vid $x = 0$ och $x = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= f(0) = 0 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= f(1) = 1 \neq 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \end{aligned}$$

så f är inte kontinuerlig vid $x = 0$ och $x = 1$.

- (b) Ge ett exempel på en funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (dvs. med definitionsmängd $D_f = \mathbb{R}$) som saknar både egentligt och oegentligt gränsvärde då $x \rightarrow \infty$. (1p)

Lösningsförslag: Funktionen

$$f(x) := \sin(x)$$

är uppenbarligen definierad för alla $x \in \mathbb{R}$. Eftersom $|\sin(x)| \leq 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$, följer att f är begränsad, så f kan inte ha ett oegentligt gränsvärde. Eftersom $\sin(k\pi) = 0$ och $\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1$ för alla heltal k , kan inte f ha ett egentligt gränsvärde.

- (c) Ge ett exempel på en funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (dvs. med definitionsmängd $D_f = \mathbb{R}^2$) som inte har några stationära punkter. (1p)

Lösningsförslag: Funktionen

$$f(x, y) = x$$

är definierad för alla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Gradienten är given av

$$\text{grad}(f) = (1, 0).$$

Då gradienten av f aldrig är lika med noll-vektorn har f inga stationära punkter.

2. (a) Vilka av följande serier konvergerar? Vilka av följande serier är absolutkonvergenta?

$$(i) \sum_{k=1}^{\infty} k^3 e^{-k} \quad (2p) \qquad (ii) \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2 + 1}{k^4 - 1} \quad (2p)$$

- (b) Är följande generaliserade integral konvergent eller divergent? (2p)

$$\int_2^{\infty} \frac{x+3}{x^2-1} dx$$

Lösningsförslag:

- (a) (i) Serien är positiv, därför antingen absolutkonvergerar den eller divergerar mot ∞ . Låt oss beteckna $a_k := k^3 e^{-k}$. För att förbereda för användning av Cauchys rotkriterium noterar vi att

$$|a_k|^{\frac{1}{k}} = k^{\frac{3}{k}} e^{-1} = \frac{1}{e} e^{3 \frac{\ln(k)}{k}}.$$

Vi kan nu använda standardgränsvärdet

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(k)}{k} = 0$$

och dra slutsatsen att

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{e}.$$

Då $\frac{1}{e} < 1$ följer av Cauchys rotkriterium att serien absolutkonvergerar. Då vi bevisat på föreläsningarna att absolutkonvergens implicerar konvergens följer även att serien konvergerar.

Svar: Serien konvergerar och absolutkonvergerar.

- (ii) Låt oss beteckna $a_k := (-1)^k \frac{k^2+1}{k^4-1}$. Vi börjar med att undersöka om serien absolutkonvergerar, dvs. vi betraktar serien

$$\sum_{k=2}^{\infty} |a_k|.$$

Serien med a_k ersatt av $|a_k|$ är en positiv serie, som alltså antingen absolutkonvergerar eller divergerar mot ∞ . Vi uppskattar $|a_k|$ exempelvis som följer. För $k \geq 2$ är $k^4 \geq 2$, dvs. $\frac{1}{2}k^4 - 1 \geq 0$, vilket innebär att

$$k^4 - 1 \geq \frac{1}{2}k^4.$$

Därför gäller att

$$|a_k| = \frac{k^2+1}{k^4-1} \leq 2 \frac{k^2+1}{k^4} = 2 \frac{1}{k^2} + 2 \frac{1}{k^4}$$

för alla $k \geq 2$. Vi kan alltså begränsa $|a_k|$ med en linjärkombination av summanderna i p -serier med $p = 2$ respektive $p = 4$. Då båda dessa värden på p är strikt större än 1 följer det enligt jämförelsekriteriet att $\sum_{k=2}^{\infty} |a_k|$ konvergerar. Då vi bevisat på föreläsningarna att absolutkonvergens implicerar konvergens följer även att serien konvergerar.

Svar: Serien konvergerar och absolutkonvergerar.

(b) Vi betraktar integralen

$$\int_2^R \frac{x+3}{x^2-1} dx.$$

För alla $x \geq 2$ kan vi uppskatta integranden underifrån som följer:

$$\frac{x+3}{x^2-1} \geq \frac{x+3}{x^2} \geq \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

Av standardjämförelsekriteriet för Riemannintegraler följer

$$\int_2^R \frac{x+3}{x^2-1} dx \geq \int_2^R \frac{1}{x} dx = \ln(R) - \ln(2) \rightarrow \infty,$$

när $R \rightarrow \infty$. Alltså divergerar den generaliserade integralen.

Svar: Den generaliserade integralen divergerar.

3. (a) **(Teori)** Definiera egentligt gränsvärde i oändligheten för en funktion $f(x)$. **(1p)**

Svar:

Definition 1. Låt $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ och antag att D_f innehåller godtyckligt stora tal. Gränsvärdet för f då x går mot oändligheten existerar och är lika med $A \in \mathbb{R}$ om och endast om: För varje $\epsilon > 0$ existerar det ett $\omega \in \mathbb{R}$ så att om $x > \omega$ och $x \in D_f$, så gäller att $|f(x) - A| < \epsilon$.

- (b) **(Teori)** Formulera instängningssatsen för gränsvärden då $x \rightarrow \infty$. **(1p)**

Svar:

Sats 1 (Instängningssatsen för gränsvärden då $x \rightarrow \infty$). Antag att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = A$$

och att det existerar ett $\omega_0 \in \mathbb{R}$ så att

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

för alla $x > \omega_0$. Då gäller att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = A.$$

- (c) **(Teori)** Bevisa instängningssatsen för gränsvärden då $x \rightarrow \infty$. **(3p)**

Svar:

Bevis för instängningssatsen för gränsvärden då $x \rightarrow \infty$. Låt $\epsilon > 0$. Vi vill hitta ett $\omega > 0$ så att om $x > \omega$, så gäller att $A - \epsilon < h(x) < A + \epsilon$. Vi vet att det existerar $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ så att om $x > \omega_1$, så gäller att $A - \epsilon < f(x) < A + \epsilon$, och om $x > \omega_2$, så gäller att $A - \epsilon < g(x) < A + \epsilon$. Därför följer att om $x > \max(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$, så gäller att

$$A - \epsilon < f(x) < h(x) < g(x) < A + \epsilon.$$

Väljer vi $\omega = \max(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$, så följer alltså att $A - \epsilon < h(x) < A + \epsilon$, vilket var implikationen vi ville visa. $\square$

4. Betrakta funktionen

$$f(x, y) = (1 + x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)},$$

för alla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- (a) Antar funktionen f ett största värde? Om ja: I vilken eller vilka punkter? **(2p)**

Lösningsförslag:

Först noterar vi att $f(x, y) > 0$ för alla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vidare får vi med hjälp av standardgränsvärden och notationen $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ att

$$\left| (1 + x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)} \right| \leq (1 + 2r^2)e^{-r^2} \rightarrow 0,$$

när $r \rightarrow \infty$. Notera också att $f(0, 0) = 1$. Väljer vi därför $\epsilon = \frac{1}{2}$ så ger oss gränsvärdesdefinitionen ett $R > 0$ så att

$$f(x, y) = |f(x, y)| \leq \epsilon = \frac{1}{2} < f(0, 0) \quad (1)$$

för alla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ så att $r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq R$, dvs. i dessa punkter kan inte största värdet antas. Då den sluta skivan med radie R är kompakt och f är kontinuerlig, vet vi att det existerar ett största värde på skivan. Dessutom kan inte största värdet ligga på randen där $r = R$, pga. av olikhet (1). Vi undersöker därför de stationära punkterna i det inre av skivan, dvs. där $r < R$. De partiella derivatorna är

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -2x(x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -2y(-1 + x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}. \end{aligned}$$

Dessa är båda lika med 0 om och endast om $x = 0$ och $y = 0$ eller $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. I dessa punkter får vi funktionsvärdena

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 1, \\ f\left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{2}{\sqrt{e}}. \end{aligned}$$

Då $\frac{2}{\sqrt{e}} > 1$ får vi följande slutats:

Svar: Det största värdet för f är $\frac{2}{\sqrt{e}}$ och antas i punkterna

$$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

- (b) Antar funktionen f ett minsta värde? Om ja: I vilken eller vilka punkter? **(1p)**

Lösningsförslag:

Vi vet från föregående uppgift att $f(x, y)$ går mot 0 då $r := \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$. Det följer att inget positivt tal kan vara det minsta värdet. Dessutom kan inte 0 vara det minsta värdet, då funktionen är positiv.

Svar: Funktionen antar inte något minsta värde.

- (c) Bestäm $\inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y)$? **(1p)**

Lösningsförslag: Vi söker den största undre begränsningen till funktionen. Då f är en positiv funktion är 0 en undre begränsning. Dessutom vet vi från uppgift (a) att $f(x, y)$ går mot 0 då $r := \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$. Därför kan inget positivt tal vara en undre begränsning.

Svar: $\inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = 0$.

- (d) **(Teori)** Antar funktionen ett minsta värde under bivillkoret $x^2 + y^2 \leq 10^{10}$? **(1p)**

Lösningsförslag: Bivillkoret $x^2 + y^2 \leq 10^{10}$ beskriver en sluten skiva i $\mathbb{R}^2$ med radie 10^5 , centrerad runt origo. Då det är en sluten och begränsad mängd är det en kompakt mängd och f är definierad och kontinuerlig på denna mängd, existerar ett minsta värde.

Svar: Ja.

5. Betrakta mängden

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}.$$

(a) **(Teori)** Är M sluten? Förklara! (1p)

Lösningsförslag: Randpunkterna till M är alla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ så att $x = 0$. Då dessa är inkluderade i M är M sluten.

Svar: Ja.

(b) **(Teori)** Är M kompakt? Förklara! (1p)

Lösningsförslag: En delmängd i $\mathbb{R}^2$ är kompakt om och endast om den är sluten och begränsad. Om M skulle vara begränsad skulle det finnas en radie R så att alla $(x, y) \in M$ uppfyllde

$$\sqrt{x^2 + y^2} < R.$$

Men då skulle punkten $(R + 1, 0)$ ligga i M , men inte uppfylla olikheten ovan, vilket vore en motsägelse. Därför är M inte kompakt.

Svar: Nej.

(c) Har funktionen

$$f(x, y) = 1 - x - y$$

ett största och ett minsta värde i M under bivillkoret $x^2 + y^2 = 1$? I vilka punkter i sådana fall? (4p)

Lösningsförslag:

Notera att mängden av alla punkter $(x, y) \in M$ som uppfyller bivillkoret är givet av

$$K = \left\{ (\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right\}.$$

Randen till K är lika med K , så K innehåller alla sina randpunkter och är därmed sluten. Dessutom är K begränsad, då

$$\sqrt{x^2 + y^2} < 2,$$

för alla $(x, y) \in K$. Därför är K kompakt. Då f är kontinuerlig och K ligger i definitionsmängden till f så antar f ett största och minsta värde i K . Max- och min-punkterna hittas till exempel genom att maximera och minimera den sammansatta funktionen

$$f(\cos(t), \sin(t)) = 1 - \cos(t) - \sin(t)$$

för $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Värdena i ändpunkterna ges av

$$f(0, -1) = 2, \quad f(0, 1) = 0.$$

Ett maximum eller minimum vid en inre punkt ges vid stationära punkter, dvs. där

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} f(\cos(t), \sin(t)) \\ &= \sin(t) - \cos(t). \end{aligned}$$

I det angivna intervallet får vi lösningen

$$t = \frac{\pi}{4}.$$

Värdet på funktionen i den punkten ges av

$$f\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \sqrt{2}.$$

Svar: Det största värdet är 2 och antas i $(0, -1)$, och det minsta värdet är $1 - \sqrt{2}$ och antas i $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Alternativ lösning för att hitta max- och min-punkterna:

För att hitta max- eller min-punkter under bivillkoret kan vi också introducera

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

och notera att bivillkoret är $g(x, y) = 0$. Enligt teori från föreläsningarna måste en max- eller min-punkt (a, b) uppfylla att $\text{grad}(f)(a, b)$ är parallell med $\text{grad}(g)(a, b)$. Med andra ord måste matrisen

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2a & 2b \end{pmatrix}$$

ha determinanten 0, vilket implicerar att $a = b$. Om vi sätter in detta i bivillkoret $g(a, b) = 0$ får vi samma punkt som ovan, nämligen

$$(a, b) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

6. (a) **(Teori)** Definiera vad det innebär att gränsvärdet för en funktion $f(x, y)$ existerar i en punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. (1p)

Svar:

Definition 2. Låt $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ och $\vec{a} = (a, b) \in D_f$. Antag att D_f innehåller punkter godtyckligt nära $\vec{a}$. Gränsvärdet för f i $\vec{a}$ existerar och är lika med $b \in \mathbb{R}$ om och endast om följande gäller: För varje $\epsilon > 0$ existerar ett $\delta > 0$ så att om $0 < |\vec{x} - \vec{a}| < \delta$ och $x \in D_f$, så följer att $|f(\vec{x}) - f(\vec{a})| < \epsilon$.

- (b) **(Teori)** Definiera vad det innebär att en funktion $f(x, y)$ är differentierbar i en punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. (1p)

Svar:

Definition 3. Låt $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ och $\vec{a} \in D_f$ och antag att $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ är öppen. Vi säger att f är differentierbar i $\vec{a}$ om det finns ett $\vec{A} \in \mathbb{R}^2$ så att

$$f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) = \vec{A} \cdot \vec{h} + |\vec{h}| \rho(\vec{h})$$

och $\rho(\vec{h}) \rightarrow 0$ då $\vec{h} \rightarrow \vec{0}$.

- (c) Existerar gränsvärdet för

$$\frac{\sin^2(xy)}{x^2 + y^2}$$

när $(x, y) \rightarrow (0, 0)$? (3p)

Lösningsförslag: Vi betraktar problemet i polära koordinater

$$x = r \cos(\theta),$$

$$y = r \sin(\theta),$$

och ser att

$$\frac{\sin^2(xy)}{x^2 + y^2} = \frac{\sin^2(r^2 \cos(\theta) \sin(\theta))}{r^2}.$$

Standardgränsvärdet

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$$

implicerar att för varje $\epsilon > 0$ existerar ett $\delta > 0$ så att om $0 < |z| < \delta$, så följer att

$$\left| \frac{\sin(z)}{z} - 1 \right| \leq \epsilon.$$

Denna olikhet kan skrivas om som

$$|\sin(z) - z| \leq \epsilon |z|,$$

vilket i sin tur implicerar att

$$|\sin(z)| \leq (\epsilon + 1) |z|.$$

Väljer vi $\epsilon = 1$ drar vi alltså slutsatsen att det existerar ett $\delta > 0$ så att

$$|\sin(r^2 \cos(\theta) \sin(\theta))| \leq 2 |r^2 \cos(\theta) \sin(\theta)| \leq 2r^2$$

om $|r^2 \cos(\theta) \sin(\theta)| < \delta$. Om vi använder denna olikhet ovan får vi

$$\frac{\sin^2(r^2 \cos(\theta) \sin(\theta))}{r^2} \leq \frac{r^4}{r^2} = r^2 \rightarrow 0,$$

när $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$.

Svar: Ja, gränsvärdet existerar.