

Instruktioner för de som skrivit kontrollskrivningar hösten 2025:

Under höstens tre kontrollskrivningar kunde man få maximalt 30 poäng.

- Om du fått totalt minst 8 poäng kan du hoppa över deluppgift 1 (a).
- Om du fått totalt minst 16 poäng kan du hoppa över deluppgifter 1 (a) och 1 (b).
- Om du fått totalt minst 24 poäng kan du hoppa över hela uppgift 1.

Inga hjälpmedel är tillåtna. Kom ihåg att ge fullständiga motiveringar för dina lösningar!

- (a) Ge ett exempel på en funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (dvs. med definitionsmängd $D_f = \mathbb{R}$) som är kontinuerlig men inte deriverbar. **(1p)**
(b) Ge ett exempel på en deriverbar funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (dvs. med definitionsmängd $D_f = \mathbb{R}$) som är begränsad men inte har något största värde. **(1p)**
(c) Ge ett exempel på en funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (dvs. med definitionsmängd $D_f = \mathbb{R}^2$) som har precis en stationär punkt. **(1p)**

Kom ihåg att motivera dina exempel ovan.

- (a) Vilka av följande serier konvergerar? Vilka av följande serier är absolutkonvergenta?

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^k}{k^2}$ **(2p)** (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}$ **(2p)**

- (b) Är följande generaliserade integral konvergent eller divergent? **(2p)**

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2 - 2x + 1} dx$$

- Låt $(a, b) \subset \mathbb{R}$ vara ett öppet intervall, låt $c \in (a, b)$ och betrakta en funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

- (Teori)** Definiera vad det innebär att f är kontinuerlig i c . **(1p)**
- (Teori)** Definiera vad det innebär att f är deriverbar i c . **(1p)**
- (Teori)** Bevisa att om f är deriverbar i c , så är f kontinuerlig i c . **(3p)**

- Betrakta funktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Är f begränsad? **(2p)**
- Är f kontinuerlig? **(2p)**
- Är f differentierbar? **(2p)**

Var god vänd blad!

5. (a) **(Teori)** Formulera satsen om extremvärden för en funktion av en variabel. **(1p)**
(b) **(Teori)** Ge ett exempel på en funktion med definitionsmängd $[0, 1]$ som saknar både största och minsta värde. Kom ihåg att motivera ditt exempel. **(2p)**

6. Betrakta funktionen

$$f(x, y) = (1 + x^2 - y^2) (x^2 + y^2)$$

för alla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- (a) Hitta alla stationära punkter till f och avgör deras karaktär. **(3p)**
(b) Antar funktionen f ett minsta och/eller största värde? Om ja: I vilken eller vilka punkter? **(2p)**
(c) **(Teori)** Antar funktionen ett minsta värde under bivillkoret $|x| + |y| = 1$? **(2p)**