

Instruktioner för de som skrivit kontrollskrivningar hösten 2025:

Under höstens tre kontrollskrivningar kunde man få maximalt 30 poäng.

- Om du fått totalt minst 8 poäng kan du hoppa över deluppgift 1 (a).
- Om du fått totalt minst 16 poäng kan du hoppa över deluppgifter 1 (a) och 1 (b).
- Om du fått totalt minst 24 poäng kan du hoppa över hela uppgift 1.

Inga hjälpmedel är tillåtna. Kom ihåg att ge fullständiga motiveringar för dina lösningar!

1. (a) Ge ett exempel på en funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (dvs. med definitionsmängd $D_f = \mathbb{R}$) som är kontinuerlig men inte deriverbar. **(1p)**

Lösningsförslag: Funktionen

$$f(x) := |x|$$

är definierad för alla $x \in \mathbb{R}$. För $x > 0$ sammanfaller denna funktion med $g(x) = x$ och är därför kontinuerlig i dessa punkter. För $x < 0$ sammanfaller denna funktion med $h(x) = -x$ och är därför kontinuerlig i dessa punkter. Dessutom är f kontinuerlig i $x = 0$, eftersom

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x).$$

Däremot är vänster- och högerderivatorna i $x = 0$ givna av

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - 0}{h} &= 1, \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - 0}{h} &= -1, \end{aligned}$$

så de sammanfaller inte. Funktionen f är alltså kontinuerlig, men inte deriverbar.

- (b) Ge ett exempel på en deriverbar funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (dvs. med definitionsmängd $D_f = \mathbb{R}$) som är begränsad men inte har något största värde. **(1p)**

Lösningsförslag: Funktionen

$$f(x) := -\frac{1}{1+x^2}$$

är definierad för alla $x \in \mathbb{R}$ och deriverbar överallt. Den är dessutom begränsad, eftersom

$$|f(x)| = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

för alla $x \in \mathbb{R}$. Dessutom antar den inget största värde, då

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0,$$

men $f(x) < 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

- (c) Ge ett exempel på en funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (dvs. med definitionsmängd $D_f = \mathbb{R}^2$) som har precis en stationär punkt. **(1p)**

Lösningsförslag: Funktionen

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

är definierad för alla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Gradienten är given av

$$\text{grad}(f) = 2(x, y).$$

Alltså är gradienten lika med nollvektorn om och endast om $x = y = 0$, dvs. endast punkten origo.

2. (a) Vilka av följande serier konvergerar? Vilka av följande serier är absolutkonvergenta?

$$(i) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^k}{k^2} \quad \mathbf{(2p)} \qquad (ii) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} \quad \mathbf{(2p)}$$

- (b) Är följande generaliserade integral konvergent eller divergent? **(2p)**

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2} dx$$

Lösningsförslag:

- (a) (i) Serien är positiv, därför antingen absolutkonvergerar den eller divergerar mot ∞ . Om en serie $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ konvergerar, då vet vi från föreläsningen att $a_k \rightarrow 0$ då $k \rightarrow \infty$. Med hjälp av variabelbytet $l = k \ln(\pi)$ och standardgränsvärden ser vi att

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\pi^k}{k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e^{k \ln(\pi)}}{k^2} = \ln(\pi)^2 \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{e^l}{l^2} = \infty,$$

så serien divergerar.

Svar: Serien varken konvergerar eller absolutkonvergerar.

- (ii) Låt oss beteckna $a_k := (-1)^k \frac{1}{k+1}$. Med hjälp av variabelsubstitutionen $l = k + 1$ börjar vi med att undersöka om serien absolutkonvergerar, dvs. vi betraktar serien

$$\sum_{k=2}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{l},$$

vilket är den harmoniska serien (förutom en ändlig del som motsvarar $l = 1, 2$), vilken vi vet från föreläsningen att den divergerar. För den ursprungliga serien ser vi att a_k alternerar och $|a_k|$ avtar, samt att $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$. Leibniz konvergenzkriterium implicerar därför att serien konvergerar.

Svar: Serien konvergerar, men absolutkonvergerar inte.

- (b) Med variabelbytet $y := x - 1$ får vi

$$\int_2^R \frac{1}{x^2 - 2x + 1} dx = \int_2^R \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int_1^{R-1} \frac{1}{y^2} dy = \left[-\frac{1}{y} \right]_1^{R-1} = 1 - \frac{1}{R-1} \rightarrow 1,$$

när $R \rightarrow \infty$.

Svar: Den generaliserade integralen konvergerar.

3. Låt $(a, b) \subset \mathbb{R}$ vara ett öppet intervall, låt $c \in (a, b)$ och betrakta en funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) **(Teori)** Definiera vad det innebär att f är kontinuerlig i c . (1p)

Lösningsförslag: Funktionen f är kontinuerlig i punkten c om

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

- (b) **(Teori)** Definiera vad det innebär att f är deriverbar i c . (1p)

Lösningsförslag: Funktionen f är deriverbar i punkten c om gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

existerar.

- (c) **(Teori)** Bevisa att om f är deriverbar i c , så är f kontinuerlig i c . (3p)

Lösningsförslag: Vi antar att f är deriverbar i punkten c , dvs. att gränsvärdet

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

existerar. Eftersom

$$f(c+h) - f(c) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} h,$$

följer av produktregeln för gränsvärden att

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} (f(c+h) - f(c)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(c+h) - f(c)}{h} h \right) \\ &= f'(c) \lim_{h \rightarrow 0} h \\ &= 0. \end{aligned}$$

Genom att definiera $h := x - c$, får vi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} (f(x) - f(c)) &= \lim_{x-c \rightarrow 0} (f(x) - f(c)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (f(c+h) - f(c)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

vilket betyder att

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c),$$

vilket skulle visas.

4. Betrakta funktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Är f begränsad? (2p)

Lösningsförslag: Betrakta funktionen f längs vid alla punkter där $y = 0$. Där är funktionen given av

$$f(x, 0) = \frac{x^3}{x^2} = x,$$

vilket är en obegränsad funktion.

Svar: Funktionen f är inte begränsad.

- (b) Är f kontinuerlig? (2p)

Lösningsförslag: Funktionen f är uppenbart kontinuerlig i alla punkter $(x, y) \neq (0, 0)$. Vi övergår till polära koordinater runt origo,

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta),$$

dvs. vi betraktar funktionen

$$f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \frac{r^3 \cos^3(\theta)}{r^2} = r \cos^3(\theta).$$

Det följer att

$$f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \rightarrow 0,$$

då $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$.

Svar: Funktionen f är kontinuerlig.

- (c) Är f differentierbar? (2p)

Lösningsförslag: Det är uppenbart att f är differentierbar i alla punkter $(x, y) \neq 0$. En funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är differentierbar i $(x, y) = (0, 0)$ om det existerar en funktion $\rho(h, k)$ så att

$$f(h, k) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k + \sqrt{h^2 + k^2}\rho(h, k),$$

där $\rho(h, k) \rightarrow 0$ när $\sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0$, givet att de partiella derivatorna existerar i $(0, 0)$. De partiella derivatorna räknas ut som

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1,$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} 0 = 0,$$

dvs. de existerar och är givna av värdena 1 respektive 0. Om nu f är differentierbar kan vi alltså se att

$$\rho(h, k) = \frac{f(h, k) - h}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{\frac{h^3}{h^2 + k^2} - h}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{\frac{h^3 - h^3 - hk^2}{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = -\frac{hk^2}{(h^2 + k^2)^{3/2}}.$$

Längs linjen $h = k$ har vi

$$\rho(h, h) = -\frac{h^3}{(2h^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2^{3/2}},$$

så $\rho(h, k)$ går inte mot noll när $\sqrt{h^2 + k^2}$ går mot 0.

Svar: Funktionen f är inte differentierbar.

5. (a) **(Teori)** Formulera satsen om extremvärden för en funktion av en variabel. (1p)

Lösningsförslag:

Sats 1. Antag att $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion. Då antar f ett största och ett minsta värde i $[a, b]$.

- (b) **(Teori)** Ge ett exempel på en funktion med definitionsmängd $[0, 1]$ som saknar både största och minsta värde. **(2p)**

Lösningsförslag:

Betrakta funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0, \\ x, & x \in (0, 1), \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \end{cases}$$

som är definierad för alla $x \in [0, 1]$. Gränsvärdena vid ändpunkterna är

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1.$$

Dessutom är $0 < f(x) < 1$ för alla $x \in [0, 1]$. Alltså saknar f största och minsta värde. (Tricket är att f inte är kontinuerlig!)

6. Betrakta funktionen

$$f(x, y) = (1 + x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$$

för alla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- (a) Hitta alla stationära punkter till f och avgör deras karaktär. **(3p)**

Lösningsförslag: Vi beräknar först de partiella derivatorna:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x(x^2 + y^2) + 2x(1 + x^2 - y^2) = 2x(1 + 2x^2), \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2y(x^2 + y^2) + 2y(1 + x^2 - y^2) = 2y(1 - 2y^2). \end{aligned}$$

De stationära punkterna ges därför av

$$(0, 0), \left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Andraderivatorna ges av

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2(1 + 2x^2) + 8x^2 = 2 + 12x^2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2(1 - 2y^2) - 8y^2 = 2 - 12y^2. \end{aligned}$$

Det följer att $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ är positiv och $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ är noll vid alla tre punkter. Slutligen är $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ positiv vid $(0, 0)$, vilket betyder att det är ett lokalt minimum, men är negativ vid $\left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, vilket betyder att dessa är sadelpunkter.

Svar: Den stationära punkterna är $(0, 0)$, som är ett lokalt minimum, och de två punkterna $\left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, som är sadelpunkter.

- (b) Antar funktionen f ett minsta och/eller största värde? Om ja: I vilken eller vilka punkter? **(2p)**

Lösningsförslag: Funktionen antar inget minsta värde, då

$$f(0, y) = (1 - y^2)y^2,$$

som ger det oegentliga gränsvärdet

$$\lim_{y \rightarrow \infty} f(0, y) = -\infty.$$

Funktionen antar heller inget största värde, då

$$f(x, 0) = (1 + x^2)x^2,$$

som ger det oegentliga gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, 0) = \infty.$$

Svar: Funktionen f antar varken största eller minsta värde.

- (c) **(Teori)** Antar funktionen ett minsta värde under bivillkoret $|x| + |y| = 1$? **(2p)**

Lösningförslag: Då f är kontinuerlig är svaret ja, om vi kan visa att mängden M av alla (x, y) som uppfyller bivillkoret är kompakt. Randpunkterna till M är alla (x, y) så att $|x| + |y| = 1$, vilket är samma som M . Därför är M sluten. Mängden är också begränsad, eftersom

$$x^2 + y^2 = |x|^2 + |y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 = 1 \leq 2$$

för alla $(x, y) \in M$. Eftersom M både är begränsad och sluten är den kompakt.

Svar: Ja, ett minsta värde existerar under bivillkoret.