

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivering krävs i varje uppgift. Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.

För att få full poäng behöver du, om det är möjligt, referera vid namn till alla satser du använder när du använder dem, och uttryckligen nämna vilka fortsättningar du använder för att satsen ska vara uppfylld.

Skriv dina lösningar för varje uppgift (1-6) på separata papper. Deluppgifter ((a),(b),...) kan skrivas på samma papper.

Varje uppgift är värd 5 poäng och minst 15 poäng, varav minst 5 från teorifrågorna, garanterar godkänt betyg. Förutsatt att du får minst 5 poäng från teoridelen, garanterar minst 15 poäng betyget E, 18 betyget D, 21 betyget C, 24 betyget B och 27 betyget A.

Problemdel

1. Vilka av följande serier konvergerar? Vilka av följande serier är absolut konvergenta? Vilka divergerar?

(a) [1p] $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+k^2}}{k^3+k+1}$

(b) [2p] $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}$

(c) [2p] $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{k}}\right)\right)$

Facit.

(a) Notera att serien är positiv och

$$\lim_k \frac{\frac{\sqrt{1+k^2}}{k^3+k+1}}{k^{-2}} = \lim_k \frac{\sqrt{1+1/k}}{1+1/k+1/k^2} = 1.$$

Eftersom serien $\sum k^{-2}$ konvergerar, ger Jämförelsekriteriet II att den ursprungliga serien konvergerar. Därmed är serien också absolutkonvergent.

(b) Serien är positiv, så är serien konvergent, om och endast om den är absolutkonvergent. Eftersom det gäller att

$$\lim_k \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = e \neq 0,$$

har vi att serien divergerar.

(c) Notera att funktionen $f(x) = 1 - \cos x$ är positiv och växande i intervallet $[0, 1]$ ty $f'(x) = \sin x \geq 0$ för varje $x \in (0, 1)$. Eftersom för alla $k \geq 1$ gäller att

$$\frac{1}{\sqrt[4]{k}} \geq \frac{1}{\sqrt[4]{k+1}}$$

medför detta att

$$b_k = 1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{k}}\right)$$

är avtagande och positivt. Dessutom gäller att

$$\lim_k 1 - \cos \frac{1}{\sqrt[4]{k}} = 0,$$

ty $f(x)$ är kontinuerlig.

Serien är en alternerade serie, så Leibniz kriterium ger oss att serien konvergerar.

Taylorutveckling för $\cos x$ ger oss att

$$1 - \cos \frac{1}{\sqrt[4]{k}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{k}} \right)^2 + O\left(\left(\sqrt[4]{k} \right)^4 \right),$$

vilket visar att

$$\lim_k \frac{1 - \cos \frac{1}{\sqrt[4]{k}}}{\frac{1}{\sqrt{k}}} = \frac{1}{2}.$$

Jämförelsekriteriet II ger oss att den ursprungliga serien inte är absolut konvergent, eftersom serien $\sum_k k^{-1/2}$ divergerar.

2. Låt $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara följden definierad av $a_1 = 1$ och

$$a_{n+1} = \frac{2+3a_n}{6}, \quad \text{för } n \geq 1.$$

(a) [2p] Använd ett induktionsargument för att visa att det gäller

$$a_n \geq \frac{2}{3}, \quad \text{för varje } n \geq 1.$$

(b) [1p] Visa att följden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ är avtagande.

(c) [2p] Använd en känd sats från kursen för att visa att följden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar och bestäm dess gränsvärde. Ange tydligt vilken sats du använder och kontrollera att alla dess antaganden är uppfyllda.

Facit.

(a) Notera att det gäller $\frac{2}{3} \leq a_1 = 1$ (Basfallet).

Antag att det gäller $\frac{2}{3} \leq a_n$ för något $n \geq 1$. Vi vill visa att olikheterna gäller också för a_{n+1} .

Ur definitionen av den rekursiva talföljden får vi att

$$\frac{2}{3} \leq a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \left(\left(6 \times \frac{2}{3} \right) - 2 \right) / 3 \leq a_n,$$

vilken uppfylls enligt induktionshypotesen.

Induktionsprincipen ger oss att olikheten gäller då för alla $n \geq 1$.

(b) Vi noterar att för varje $n \geq 1$ gäller

$$a_n \geq a_{n+1} \Leftrightarrow a_n \geq \frac{2}{3},$$

vilket vi har visat ovan att det stämmer. Det medför att talföljden $\{a_n\}_n$ är avtagande.

(c) Vi har visat att talföljden är begränsad och monoton avtagande.

Monotonkonvergensprincipen ger oss att gränsvärdet existerar. Kalla det ℓ . Om vi tar gränsvärdet i den rekursiva formeln får vi att ℓ uppfyller

$$6\ell = 2 + 3\ell \Leftrightarrow \ell = \frac{2}{3}.$$

3. Betrakta funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|y^2}{4x^2+2y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- (a) [2p] Är funktionen f kontinuerlig i origo?
(b) [2p] Är funktionen f partiellt deriverbar i origo?
(c) [1p] Är funktionen f differentierbar i origo?

Facit.

- (a) Notera att

$$f(y^2, y) = \frac{y^4}{6y^4} = \frac{1}{6},$$

som konvergerar inte mot $0 = f(0,0)$ då y går mot 0 . Så har vi hittat en kurva $\gamma(t) = (t^2, t)^T$ som $\gamma(t) \rightarrow (0,0)^T$ då $t \rightarrow 0$ medan

$$f(\gamma(t)) \not\rightarrow 0, \quad \text{då } t \rightarrow 0.$$

Så f är inte kontinuerlig i origo.

- (b) Det gäller att

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0,$$

och på samma sätt visas att $\frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = 0$. Så är f_α partiellt deriverbar i origo.

- (c) Funktionen f är inte differentierbar i origo. Annars, det skulle vara kontinuerlig där.

Var god vänd!

4. (a) [2p] Bestäm samtliga stationära punkter till funktionen

$$f(x,y) = 4 + e^{2y}(y^2x - x)$$

samt avgör deras karaktär.

- (b) [3p] Argumentera varför det finns lösning till problemet

$$\begin{aligned} \min \quad & x + 2y + 5 \\ \text{sådant att} \quad & x^2 + 4y^2 = 7 - 2x \\ & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

och bestäm minimivärdet av funktionen med dessa bivillkor.

Facit.

- (a) Funktionen är differentierbar i \mathbb{R}^2 eftersom den kan skrivas som en produkt och en sammansättning av differentierbara funktioner.

De partiella derivator blir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{2y}(y^2 - 1)$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xe^{2y}(y^2 + y - 1).$$

Så finns det två stationära punkter

$$p_1 = (0, 1), \quad p_2 = (0, -1).$$

Andra ordning partiella derivator blir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2e^{2y}(y^2 + y - 1), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x(\dots).$$

Den kvadratiska formen associerad till punkten p_1 blir

$$Q_{p_1}(x,y) = 2e^2xy,$$

som är en indefinit form, så gäller att p_1 är en sadelpunkt.

Den kvadratiska formen associerad till punkten p_2 blir

$$Q_{p_2}(x,y) = -2e^{-2}xy$$

som är också indefinit. Då gäller att p_2 är en sadelpunkt.

- (b) Funktionen $f(x,y) = x + 2y + 5$ är kontinuerlig ty är det en polynom.

Notera att kan vi skriva om $x^2 + 4y^2 = 7 - 2x$ som

$$(x+1)^2 + 4y^2 = 8.$$

Punkter som uppfyller detta ekvation beskriver en ellips, som är en kompakt mängd. Så Extremvärdesatsen ger oss att både maximi- och minimivärdet antas i mängden.

Båda kostnadsfunktionen och bivillkor ges av differentierbara funktioner. Så extrempunkter (x,y) måste uppfylla att

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1 & 2x+2 \\ 2 & 8y \end{pmatrix} = 8y - 4 - 4x = 0 \Leftrightarrow x+1 = 2y.$$

Om vi sätter in dessa villkor i bivillkoret, får vi att

$$(2y)^2 + 4y^2 = 8 \Leftrightarrow 8y^2 = 8 \Leftrightarrow y = \pm 1.$$

Så får vi 2 möjliga extrempunkter:

$$(-3, -1), \quad (1, 1).$$

Om vi värdera funktionen i dessa punkter får vi

$$f(-3, -1) = 0, \quad f(1, 1) = 8.$$

Så får vi att minimivärdet av funktionen med dessa bivillkor är 0 och det antas i punkten $(-3, -1)$.

Teoridel

5. (a) [1p] Definiera begreppet *gränsvärde* för en funktion $f(x)$ då $x \rightarrow a$, där $a \in \mathbb{R}$.
- (b) [1p] Definiera begreppet *randpunkt* för en mängd $M \subset \mathbb{R}^n$, där $n \geq 1$.
- (c) [1p] Om M är mängden av alla rationella tal inom $[1,2]$, bestäm mängden av alla randpunkter till M .
- (d) [2p] Låt $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion. Definiera begreppet *underintegral* för f och visa att

$$-\infty < \int_0^1 f(x) dx < +\infty.$$

Facit.

- (a) För varje $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\delta > 0$ sådant att för varje $x \in D_f$ gäller att om $0 < |x - a| < \delta$ så är $|f(x) - L| < \varepsilon$.
- (b) Se kurslitteratur.
- (c) Notera först att $M \subset [1,2]$, vilken är en sluten mängd. Då gäller att $\partial M \subset [1,2]$. Vi vill visa att dessa två mängder är lika, så räcker det att visa att varje punkt i $[1,2]$ tillhör randen av M . Låt $p \in [1,2]$. För varje $\varepsilon > 0$ finns både rationella och irrationella tal i intervallet $[1,2] \cap (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$. Det medför att $p \in \partial M$.
- (d) Se kurslitteratur.

6. (a) [1p] Komplettera texten nedan: Vi säger att mängden $M \subset \mathbb{R}$ är *nedåt begränsad* om

$$\frac{\quad}{(1)} B \in \mathbb{R} \quad \text{sådan att} \quad \frac{\quad}{(2)} x \in M \quad \text{gäller att} \quad x \frac{\quad}{(3)} B.$$

Skriv hela påståendet i ditt svar, med texten eller kvantifikatorer.

- (b) [1p] Definiera begreppet *differentierbarhet* för en funktion av flera variabler.
- (c) [3p] Låt $f(x, y)$ vara av klass \mathcal{C}^3 i en omgivning av origo, och antag att $\nabla f(0, 0) = (0, 0)^T$. Visa att om den kvadratiska formen i Taylorutvecklingen av f i $(0, 0)$ är positivt definit så är $(0, 0)$ ett lokalt minimum.

Facit.

- (a) "Det finns ett tal $B \in \mathbb{R}$, sådant att för varje $x \in M$ gäller att $x \geq B$."
- (b) Se kursboken (Def. 2 i sidan 53 av [PB2]).
- (c) Se kursboken (Sats 12 i Avsnitt 2.6 i boken [PB2]).