
Inga hjälpmedel tillåtna. Motivering krävs i varje uppgift. Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.

För att få full poäng bör du, när det är möjligt, hänvisa till de satser du använder genom att ange deras namn samt uttryckligen kontrollera att alla antaganden i satserna är uppfyllda.

Skriv dina lösningar för varje uppgift (1-6) på separata papper. Deluppgifterna (a),(b),... kan skrivas på samma papper.

Varje uppgift är värd 5 poäng och minst 15 poäng, varav minst 5 från teorifrågorna, garanterar godkänt betyg. Förutsatt att du får minst 5 poäng från teoridelen, garanterar minst 15 poäng betyget E, 18 betyget D, 21 betyget C, 24 betyget B och 27 betyget A.

Problem del

1. (a) Avgör om följande generaliserade integraler konvergerar:

i. $[2p] \int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x}} dx$ ii. $[1p] \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^{2026} \ln(1+x)}.$

- (b) $[2p]$ Bestäm för vilka värden på $\alpha > 0$ serien

$$\sum_{k \geq 0} \left(\frac{k+5}{\alpha k+6} \right)^k$$

divergerar.

Facit.

- (a) i. Konvergent, ii. Divergent. (b) $0 < \alpha \leq 1$.

2. Låt $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara följderna definierade av $b_1 = 4$ och

$$b_{n+1} = \frac{2b_n + 1}{3} \quad \text{för } n \geq 1.$$

- (a) $[2p]$ Använd ett induktionsargument för att visa att det gäller att

$$b_n \geq 1, \quad \text{för varje } n \geq 1.$$

- (b) $[1p]$ Visa att följderna $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ är avtagande.

- (c) $[2p]$ Använd en känd sats från kursen för att visa att följderna $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar och bestäm dess gränsvärde. Ange tydligt vilken sats du använder och kontrollera att alla dess antaganden är uppfyllda.

Facit.

- (a) Använd en induktions argument för att visar det.

- (b) Det är ekvivalent med att visa att $b_n \geq 1$ för alla $n \geq 1$.

- (c) Monotonikonvergensprincipen garanterar att gränsvärdet existerar. En direkt beräkning och tillämpning av gränsvärdens egenskaper ger att gränsvärdet är lika med 1.

3. Betrakta funktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{2x^6 + 3y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) [2p] Är funktionen f kontinuerlig i origo?
- (b) [2p] Är funktionen f partiellt deriverbar i origo?
- (c) [1p] Är funktionen f differentierbar i origo?

Facit. (a) Nej. (b) Ja. (c) Nej.

4. (a) Avgör karaktären (positivt/negativt definit; positivt/negativt semidefinit eller indefinit) av följande kvadratiska former:

i. [1p] $Q_1(x, y) = 2x^2 + xy + 2y^2$

ii. [1p] $Q_2(x, y, z) = 4x^2 - 3y^2 - 3z^2 - 4xy - 4xz - 2yz$

(b) Bestäm om följande mängder är begränsade i $\mathbb{R}^2$ respektive i $\mathbb{R}^3$:

i. [1p] $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : Q_1(x, y) = 5\}$; ii. [1p] $C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : Q_2(x, y, z) \leq 1\}$

(c) [1p] Bestäm, om det existerar, det största avståndet från C_1 till origo. Om det inte existerar, förklara varför.

Facit.

(a) i. Det är *Positivt definit*. ii. Det är *Indefinit*.

(b) i. Det är begränsad. ii. Det är obegränsad.

(c) Det största avståndet från C_1 till origo är $\sqrt{\frac{10}{3}}$.

Teoridel

5. (a) [2p] Komplettera texten nedan: Vi säger att B är *infimum* för $M \subset \mathbb{R}$ om följande två villkor är uppfyllda:

i.

$$\frac{\text{För varje } x \in M}{(1)} \quad \text{gäller att} \quad x \frac{\text{ } \geq \text{ }}{(2)} B$$

ii.

$$\text{För varje } y > B \quad \text{gäller att} \quad \frac{\text{det finns } z \in M}{(3)} \quad \text{sådan att} \quad y \frac{\text{ } < \text{ }}{(4)} z$$

Skriv hela påståendet i ditt svar, med ord, olikhetstecken eller kvantifikatorer.

- (b) [1p] Ange ett exempel på en konvergent serie som inte konvergerar absolut. Bevisa det som du påstår.
- (c) [2p] Låt $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion. Definiera begreppet *överintegral* för f och visa att

$$-\infty < \int_0^1 f(x) dx < +\infty.$$

Facit.

- (a) Vi säger att B är *infimum* av $M \subset \mathbb{R}$ om följande två villkor uppfylls:

i.

$$\frac{\text{För varje } x \in M}{(1)} \quad \text{gäller att} \quad x \frac{\text{ } \geq \text{ }}{(2)} B$$

ii.

$$\text{För varje } y > B \quad \text{gäller att} \quad \frac{\text{det finns } z \in M}{(3)} \quad \text{sådan att} \quad y \frac{\text{ } < \text{ }}{(4)} z$$

- (b) Serien $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$ konvergerar men inte konvergerar absolut.

Om vi låt $a_k = k^{-1}$ för $k \in \mathbb{N}$ med $k \geq 1$ är talföljden $\{a_k\}_k$ positiv, avtagande och $\lim_k a_k = 0$. Så kan vi använda Leibniz konvergenstkriterium för alternerade serier för att visa att det är en konvergent serie.

Dessutom serien $\sum_{k \geq 1} k^{-1}$ är den harmoniska serien, som vi har bevisat i kursen är divergent.

- (c) Se kurslitteratur.

6. (a) [1p] Definiera begreppet *delföljd* av en talföljd av reella tal.

- (b) [1p] Givet $S \subset \mathbb{R}^2$ definierar vi

$$\pi_1(S) := \{x \in \mathbb{R} : \text{det finns något } y \in \mathbb{R} \text{ sådant att } (x, y) \in S\} \subset \mathbb{R}.$$

Visa att om $S \subset \mathbb{R}^2$ är en begränsad mängd i planet, så är $\pi_1(S)$ en begränsad delmängd av $\mathbb{R}$.

- (c) [1p] Låt $S \subset \mathbb{R}^2$ vara en begränsad mängd i planet. Låt $\{\mathbf{z}_n\}_{n=1}^\infty$, där $\mathbf{z}_n = (x_n, y_n)$, vara en följd av punkter i S . Visa att talföljden $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ har en konvergent delföljd.
- (d) [2p] Visa att en talföljd $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ konvergerar mot x då $n \rightarrow +\infty$, om och endast om alla delföljder till $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ har samma gränsvärdet x .

Facit.

- (a) Se kurslitteratur.
- (b) Om $S \subset \mathbb{R}^2$ är en begränsad mängd, existerar $B > 0$ sådan att

$$\forall (x, y) \in S \sqrt{x^2 + y^2} \leq B.$$

Givet $x \in \pi(S)$, kan vi hitta $y \in \mathbb{R}$ sådant att $(x, y) \in S$. Därför gäller att

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq B.$$

Så gäller att $\pi(S) \subset \mathbb{R}$ är begränsad.

- (c) Vi noterar att $\{x_n\}_n \subset \pi(S)$. Av föregående uppgift följer att talföljden $\{x_n\}_n$ är begränsad. Enligt Bolzano-Weierstrass sats har därför talföljden $\{x_n\}_n$ en konvergent delföljd.
- (d) Antag först att alla delföljder konvergerar mot x . Eftersom $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ är en delföljd av sig själv, är direkt från antagande att talföljden konvergerar mot x .
Antag nu att $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ konvergerar mot x . Låt $\{x_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ bara en godtyckligt delföljd.
Givet $\varepsilon > 0$, det finns $\omega \in \mathbb{N}$ sådant att för alla $n \geq \omega$ så gäller att

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

Eftersom följderna av naturliga talen är $\{n_j\}_j$ är strängt växande, kan vi då hitta $j_0 \in \mathbb{N}$, beroende av ω sådant att, för alla $j \geq j_0$ gäller att $n_j \geq \omega$. Det medför att

$$j \geq j_0 \Rightarrow |x_{n_j} - x| < \varepsilon.$$

Därför har vi visat att delföljden $\{x_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ konvergerar mot x .