MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLM UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: S. Rodríguez-López

Tentamensskrivning i
Analys, del A
MM5010 7.5hp
240815

`Inga hjälpmedel tillåtna. Samtliga svar måste motiveras. Minst 7,5 poäng på problemdelen krävs för att gå vidare till den muntliga delen. Talen är inte ordnade efter svårighetsgrad. Skriv dina lösningar på separat papper.`

Problemdel

1. (a) **[2 p]** Bestäm för vilka värden av $\alpha > 0$ konvergerar serien

$$\sum_{k\geq 1}\left(\frac{k-1}{\alpha k+5}\right)^k.$$

(b) **[1 p]** Bestäm för vilka värden av $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergerar följande generaliserade integral

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

Facit. (a) Serien divergerar för $\alpha \leq 1$.

(b) Integralen konvergerar om, och bara om $\alpha < 2$.

2. För varje $\alpha \in \mathbb{R}$, låt $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara funktionen definierad av

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} x^2y^4(x^2+y^2)^\alpha, & \text{om } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{om } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) **[1 p]** Bestäm för vilka värden av α som funktionen f_α är partiellt deriverbar i origo.

(b) **[1 p]** Bestäm för vilka värden av α som funktionen f_α är differentierbar i origo.

(c) **[1 p]** Bestäm om det finns ett värde av $\alpha \in \mathbb{R}$ så att funktionen f_α uppfyller att det finns en riktning w sådan att riktningsderivatan av f i origo i riktningen w är lika med -1. Motivering krävs.

Facit.

(a) Funktionen f_α är partiellderiverbar i origo för alla $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Funktionen f_α är differentierbar i origo om, och bara om $\alpha > -5/2$.

(c) Det existerar inte.

3. **[3 pt]** En funktion $f(x,y)$ har kontinuerliga derivator av första och andra ordningen. Man vet att

$$f(1,1) = 2 \quad f'_x(1,1) = 1, \quad f'_y(1,1) = 0,$$
$$f''_{xx}(1,1) = 2, \quad f''_{xy}(1,1) = 3, \quad f''_{yy}(1,1) = 4.$$

Låt

$$g(t) := f(-t^2+2t, -\cos(\pi t)).$$

Beräkna Taylorpolynomet av ordning 2 till g kring punkten $t_0 = 1$.

Facit. Taylorpolynomet av ordning 2 till g kring $t_0 = 1$ är

$$P(t) = 2 - (t-1)^2.$$

4. Låt

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + 2y^2 = 4\right\},$$

och låt

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2.$$

(a) [**1 p**] Bevisa i detaljer att mängdgen M är kompakt.

(b) [**2 p**] Bestäm det största och det minsta värdet som funktionen $f(x,y)$ tar på mängden M.

Facit. (a) Mängden $\{(x,y) : x^2 + xy + 2y^2 = 3\}$ är sluten och eftersom

$$x^2 + xy + 2y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{7y^2}{4} = 4,$$

så är det lätt att inse att både x och y är begränsade.

(b)

$$\text{Svar: Max} = 4 \text{ och antas i } (\pm 2, 0). \text{ Min} = \frac{12}{7} \text{ och antas i } (\pm\frac{2}{\sqrt{7}}, \mp\frac{4}{\sqrt{7}}).$$

5. Betrakta funktionen $f(x,y) = -y^3 - 3xy + 6y - x^3 + 6x^2 - 12x + 5$.

(a) [**2 p**] Hitta alla stationära punkter för denna funktion, och bestäm, för varje av dessa, den associerade kvadratiska formen.

(b) [**1 p**] Bestäm om de stationära punkterna är lokala maxima, minima eller sadelpunkter.

Facit.

(a) Det finns två stationära punkter

$$p_1 = (1, -1) \qquad p_2 = (2, 0).$$

och den quadratiska formerna blir

$$Q_{p_2}(h,k) = -6kh \qquad Q_{p_1}(h,k) = 6h^2 - 6hk + 6k^2.$$

(b) Punkten p_2 är en sadelpunkt och p_1 ett lokalt minimipunkt.

Teoridel

6. [**3 p**] Definiera riktningsderivata och gradient. Visa att en funktion av två variabler växer snabbast i gradientens riktning.

7. [**3 p**] Formulera och bevisa medelvärdessatsen samt satsen om sambandet mellan derivata och monotonicitet.

LYCKA TILL!

Skrivningen beräknas vara rättat torsdag 22 augusti 2024, och listan av dem som kommer att kallas till muntan ska publiceras kort därefter i kursidan.