MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik II Analys del A
28 oktober 2024

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivering krävs i varje uppgift. Varje uppgift är värd 5 poäng och minst 15 poäng, varav minst 5 från teorifrågorna, krävs för godkänt

1. (a) Vilka av följande serier konvergerar? Vilka av följande serier konvergerar absolut? (3p)

$$(i) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{e^{k^2}-1} \qquad (ii) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+\sqrt{k}} \qquad .$$

(b) Avgör huruvida följande generaliserade integral är konvergent. (2p)

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{2x\ln x}$$

Lösningsförslag *(a) Vi observerar först att* $e^{k^2}-1>0$ *för* $k\geq 2$*, varför serien i (i) innehåller positiva termer. Därmed sammanfaller konvergens och absolutkonvergens i detta fall. Kända egenskaper hos exponentialfunktionen ger vidare att att för varje* $N\in\mathbb{N}$ *existerar ett naturligt tal* $M=M(N)$ *sådant at* $e^{x^2}>x^N+1$ *för* $x\geq M$*. Om vi nu tillämpar jämförelsekriterium I med* $a_k=(e^{k^2}-1)$ *och* $b_k=k^{-10}$ *med start i* $n=M(N)$ *följer konvergensen att serien i (i).*

Vi undersöker först absolutkonvergens hos serien i (ii). Vi har att $k+\sqrt{k}\leq 2k$ *för* $k\geq 1$*, och därmed* $a_k=\frac{1}{k+\sqrt{k}}\geq\frac{1}{2k}=b_k$*. Enligt jämförelsekriterium I divergerar serien* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+\sqrt{k}}$*, vilket betyder att den givna serien i (ii) ej konvergerar absolut.*

Vi studerar nu betingad konvergens hos serien i (ii). Vi har $a_k\geq 0$ *för alla* k*, vilket betyder att serien i (ii) är alternerande, och standardgränsvärden visar att* $\lim_{n\to\infty}a_n=0$*. Slutligen har funktionen* $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x}}$ *derivatan* $f'(x)=-\frac{2\sqrt{x}+1}{2x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x}+1)^2}$*, vilken är negativ på* $[1,\infty)$*. Därmed är* f *avtagande på* $[1,\infty)$*, varför även* $a_{k+1}\leq a_k$ *för* $k\geq 1$*. Alltså är serien i (ii) konvergent enligt Leibnitz kriterium.*

(b) Vi undersöker integralerna $\int_2^R dx/(2x\ln x)$ *för* $R>2$*. Substitutionen* $u=\ln x$ *ger att* $F(x)=\ln\ln x$ *är en primitiv funktion till den givna integranden. Alltså fås*

$$\int_2^R \frac{1}{2x\ln x}dx=\frac{1}{2}[\ln\ln x]_2^R=\frac{1}{2}(\ln\ln R-\ln\ln 2).$$

Eftersom $\ln\ln x$ *saknar ändligt gränsvärde i oändligheten existerar ej heller*

$$\lim_{R\to\infty}\int_2^R\frac{dx}{2x\ln x}=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}(\ln\ln R-\ln\ln 2).$$

Den generaliserade integralen är således divergent.

2. **(Teori)** (a) Vad menas med att en funktion $f(x,y)$ är differentierbar i en punkt (a,b)? (1p)

(b) Avgör huruvida gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x(x+y+x^3)+2y^2}{x^2+xy+y^2}$$

existerar. (3p)

(Teori)(c) Är funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x(x+y+x^3)+2y^2}{x^2+xy+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 2024, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

differentierbar i origo? (1p)

Lösningsförslag

(a) Se PB2, s. 53, för en definition.

(b) Vi gör först omskrivningen

$$\frac{2x(x+y+x^3)+2y^2}{x^2+xy+y^2} = \frac{2x^2+2xy+2y^2+2x^4}{x^2+xy+y^2} = 2 + \frac{2x^4}{x^2+xy+y^2}.$$

För att bestämma gränsvärdet i (b) räcker det alltså att beräkna

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+xy+y^2}.$$

Detta kan göras med hjälp av polära koordinater. Vi har

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^4\cos^4\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin\theta\cos\theta + r^2\sin^2\theta} = r^2\frac{\cos^4\theta}{1+\sin\theta\cos\theta}.$$

Detta uttryck går mot 0 *när* $r \to 0$ *eftersom* $\cos^4\theta$ *är en begränsad funktion och* $\frac{1}{2} \leq 1 + \sin\theta\cos\theta \leq \frac{3}{2}$ *vilket följer från den trigonometriska identiteten* $2\sin\theta\cos\theta = \sin(2\theta)$*. Därmed existerar det givna gränsvärdet och är lika med* 2*.*

(c) Från deluppgift (b) fås att den givna funktionen $f(x,y)$ *ej är kontinuerlig i origo. Enligt en känd sats från kursen är differentierbara funktioner speciellt kontinuerliga. Alltså följer att* f *ej är differentierbar i origo.*

3. Bestäm samtliga stationära punkter till funktionen

$$f(x,y) = (x-y)^3(x+y)$$

samt avgör deras karaktär. (5p)

Lösningsförslag

Den givna funktionen är ett polynom i två variabler och därmed godtyckligt många gånger kontinuerligt deriverbar.

Vi beräknar de partiella derivatorna till f *och får*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-y)^2(2x+y) \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2(x-y)^2(x+2y).$$

Båda partiella derivatorna försvinner när $x = y$*. Om* $2x = -y$ *och* $x = -2y$ *måste* $x = y = 0$*. Således ger diagonalen* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ *samtliga stationära punkter till* f*.*

Eftersom f *försvinner till ordning* 3 *längs med diagonalen inses att samtliga partiella derivator av ordning* 2 *är noll där. (Detta kan naturligtvis även erhållas med hjälp av derivering och insättning av* $x = y$*.) Vi kan således inte använda metoden med undersökning av en kvadratisk form för att utröna de stationära punkternas karaktär.*

Vi noterar istället att $f(x,x) = 0$ *för varje* $x \in \mathbb{R}$ *samt att diagonalen går genom första och tredje kvadranten. Låt oss betrakta första kvadranten* $K_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$*. Denna mängd kan vidare delas upp i en bit av diagonalen, och* $K_{1,1} = \{(x,y) \in K_1 : y > x\}$ *samt* $K_{1,2} = \{(x,y) \in K_1 : y < x\}$*. Vi ser nu att* $f(x,y) < 0$ *för* $(x,y) \in K_{1,1}$ *medan* $f(x,y) > 0$ *för* $(x,y) \in K_{1,2}$*. Samtliga punkter på diagonalen i första kvadranten är således sadelpunkter. På liknande sätt fås att* $f(x,y) > 0$ *om* $x < 0, y < 0$ *och* $y > x$ *medan* $f(x,y) > 0$ *för* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *med* $y < x$*.*

Sammanfattningsvis består mängden $\{x = y\}$ *av stationära punkter av sadelpunkter.*

4. **(Teori)** (a) Antar funktionen $f(x, y) = 4xy - 1$ ett största och ett minsta värde under bivillkoret $x^2 + y^2 = 2x$? (1p)

   (b) Bestäm det största värdet och det minsta värdet till $f(x, y) = 4xy - 1$ under bivillkoret ovan samt ange i vilka punkter dessa värden antas. (4p)

   Lösningsförslag

   (a) Den givna funktionen f är ett polynom i två variabler och således en kontinuerlig funktion. Vidare kan bivillkoret skrivas som

   $$(x-1)^2 + y^2 = 1,$$

   och detta beskriver en cirkel, vilken utgör en kompakt mängd. Enligt satsen om extremvärden antar således f ett största värde och ett minsta värde under det givna bivillkoret.

   (b) Vi söker stationära punkter för f under bivillkoret $g(x, y) = 0$ med valet $g(x, y) = x^2 - 2x + y^2$. Vi har $\mathrm{grad} f = 4(y, x)$ samt $\mathrm{grad} g = 2(x - 1, y)$, och den senare gradienten är nollskild när $g(x, y) = 0$. Vi undersöker således nollställen till determinanten vars rader är de två gradienterna, och vi får

   $$0 = -y^2 + x^2 - x$$

   det vill säga $y^2 = x^2 - x$. Insättning i bivillkoret ger nu att $x(2x - 3) = 0$ det vill säga $x = 0$, vilket ger punkten $(0, 0)$ där $f(0, 0) = -1$, eller $x = \frac{3}{2}$ vilket ger de två punkterna $p_1 = (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ och $p_2 = (\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. Vi har $f(p_1) = -1 + 3\sqrt{3}$, det största värdet under bivillkoret, samt $f(p_2) = -1 - 3\sqrt{3}$ vilket är det minsta.

5. **(Teori)** (a) Vad menas med att en funktion $f(x, y)$ är uppåt begränsad? Vad menas med att en funktion är nedåt begränsad? Vad menas med att en funktion är begränsad? (2p)

   (b) Betrakta funktionen

   $$f(x, y) = \frac{xy}{|x| + |y|}$$

   på mängden $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0, y < 0\}$.

   Är f uppåt begränsad på D? Är f nedåt begränsad? Är f begränsad? (3p)

   Lösningsförslag

   (a) Se PB1, s. 95, för en definition.

   (b) Vi noterar att nämnaren till den givna funktionen f alltid är positiv i den aktuella mängden D, medan täljaren är negativ. Således antar $f(x, y)$ negativa värden i D och är därmed uppåt begränsad. Funktionen är däremot inte nedåt begränsad, ty $(x, -x) \in D$ när $x > 0$ och vi har i sådana punkter $f(x, -x) = \frac{-x^2}{2|x|} = -\frac{x}{2}$, där det sista uttrycket antar godtyckligt små värden.

   Därmed är funktionen f inte heller begränsad.

6. **(Teori)** (a) Definiera begreppet egentligt gränsvärde i oändligheten. (1p)

   (Teori) (b) Definiera begreppet monoton funktion. (1p)

   (Teori) (c) Visa, utgående från supremumaxiomet, att en begränsad monoton funktion har ett egentligt gränsvärde då $x \to \infty$. (3p)

   Lösningsförslag

   (a) Se PB1, s.136, för denna definition.

   (b) Se PB1, s. 96, för denna definition.

   (c) Se K1, sats 1, för ett bevis.