

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivering krävs i varje uppgift. Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.

För att få full poäng behöver du, om det är möjligt, referera vid namn till alla satser du använder när du använder dem, och uttryckligen nämna vilka fortsättningar du använder för att satsen ska vara uppfylld.

Skriv dina lösningar för varje uppgift (1-6) på separata papper. Deluppgifter ((a),(b),...) kan skrivas på samma papper.

Varje uppgift är värd 5 poäng och minst 15 poäng, varav minst 5 från teorifrågorna, garanterar godkänt betyg. Förutsatt att du får minst 5 poäng från teoridelen, garanterar minst 15 poäng betyget E, 18 betyget D, 21 betyget C, 24 betyget B och 27 betyget A.

Problemdel

1. Vilka av följande serier konvergerar? Vilka av följande serier är absolut konvergenta? Vilka divergerar?

$$(a) \text{ [1p]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}}{2k^2-1} \quad (b) \text{ [2p]} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \quad (c) \text{ [2p]} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+3}{2k+4}\right)^k$$

Facit.

(a) Notera att serien är positiv och

$$\lim_k \frac{\frac{\sqrt{k+1}}{2k^2+1}}{k^{-3/2}} = \lim_k \frac{\sqrt{1+1/k}}{2+1/k^2} = \frac{1}{2}.$$

Eftersom serien $\sum k^{-3/2}$ konvergerar, ger Jämförelsekriteriet II att den ursprungliga serien konvergerar. Därmed är serien också absolutkonvergent.

(b) Notera att funktionen $f(x) = \sin x$ är positiv och växande i intervallet $[0, 1]$ ty $f'(x) = \cos x \geq 0$ för varje $x \in (0, 1)$. Eftersom för alla $k \geq 1$ gäller att

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

medför detta att

$$b_k = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

är avtagande och positivt. Dessutom gäller att

$$\lim_k \sin \frac{1}{\sqrt{k}} = 0,$$

ty

$$0 \leq \sin \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Serien är en alternerade serie, så Leibniz kriterium ger oss att serien konvergerar.

Observera att

$$\lim_k \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{k}}}{\frac{1}{\sqrt{k}}} = 1,$$

och serien $\sum_k k^{-1/2}$ divergerar. Jämförelsekriteriet II ger oss att den ursprungliga serien inte är absolut konvergent.

(c) Serien är positiv, så är serien konvergent, om och endast om den är absolutkonvergent. Eftersom det gäller att

$$\lim_k \frac{k+3}{2k+4} = \frac{1}{2},$$

ger oss Rotkriterium att serien konvergerar.

2. Låt $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara följderna definierade av $a_1 = 4$ och

$$a_{n+1} = 4 + \frac{a_n}{3}, \quad \text{för } n \geq 1.$$

(a) [2p] Använd ett induktionsargument för att visa att det gäller

$$0 \leq a_n \leq 6, \quad \text{för varje } n \geq 1.$$

(b) [1p] Visa att följderna $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ är växande.

(c) [2p] Använd en känd sats från kursen för att visa att följderna $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar och bestäm dess gränsvärde. Ange tydligt vilken sats du använder och kontrollera att alla dess antaganden är uppfyllda.

Facit.

(a) Notera att det gäller $0 \leq a_1 = 4 \leq 6$ (Basfallet).

Antag att det gäller $0 \leq a_n \leq 6$ för något $n \geq 1$. Vi vill visa att olikheterna gäller också för a_{n+1} .

Ur definitionen av den rekursiva talföljden får vi att

$$0 \leq a_{n+1} \leq 6 \Leftrightarrow -12 \leq a_n \leq 6,$$

vilken uppfylls enligt induktionshypotesen.

Induktionsprincipen ger oss att olikheten gäller då för alla $n \geq 1$.

(b) Vi noterar att för varje $n \geq 1$ gäller

$$a_n \leq a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{2a_n}{3} \leq 4 \Leftrightarrow a_n \leq 6,$$

vilket vi har visat ovan att det stämmer. Det medför att talföljden $\{a_n\}_n$ är växande.

(c) Vi har visat att talföljden är begränsad och monoton växande.

Monotonkonvergensprincipen ger oss att gränsvärdet existerar. Kalla det ℓ . Om vi tar gränsvärdet i den rekursiva formeln får vi att ℓ uppfyller

$$\ell = 4 + \frac{\ell}{3} \Leftrightarrow \ell = 6.$$

3. För varje $\alpha \leq 0$, låt $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara funktionen definierad av

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} xy^2(2x^2 + 3y^2)^\alpha, & \text{om } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{om } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- (a) [2p] Bestäm för vilka värden av α som gränsvärdet $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} f_\alpha(x,y)$ existerar (ändligt).
(b) [1p] Bestäm för vilka värden av α som funktionen f_α är partiellt deriverbar i origo.
(c) [2p] Bestäm för vilka värden av α som funktionen f_α är differentierbar i origo.

Facit.

- (a) En variabelbyte till polära koordinata ger oss

$$f_\alpha(x,y) = r^{3+2\alpha} \cos \theta \sin^2 \theta (2 + \sin^2 \theta)^\alpha.$$

Om $\alpha < -\frac{2}{3}$ gäller att

$$|f_\alpha(x,y)| \leq 2^\alpha r^{3-2\alpha} \rightarrow 0, \quad \text{då } r \rightarrow 0^+.$$

Därför $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} f_\alpha(x,y) = 0$ i detta fall.

Om $0 \geq \alpha \geq -\frac{2}{3}$, om vi låter kurvorna

$$\gamma_1(t) = (t,t), \quad \gamma_2(t) = (0,t),$$

så gäller att

$$f(\gamma_1(t)) = t^{3+2\alpha} 5^\alpha, \quad f(\gamma_2(t)) = 0.$$

Det visas att gränsvärdet $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} f_\alpha(x,y)$ inte existerar.

- (b) Notera att, för alla $\alpha \leq 0$, f_α är väl definierad i en punkterad omgivning av origo. Dessutom gäller det att

$$\frac{\partial}{\partial x} f_\alpha(0,0) := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_\alpha(x,0) - f_\alpha(0,0)}{x} = 0,$$

och på samma sätt visas att $\frac{\partial}{\partial y} f_\alpha(0,0) = 0$. Så är f_α partiellt deriverbar i origo för alla $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (c) Funktionen f_α är differentierbar i origo om, och bara om gäller

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f_\alpha(x,y)}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = 0.$$

Med ett liknande argument som i den första delen av uppgiften, visas att det gäller om, och bara om, $\alpha > -1$.

Var god vänd!

4. (a) [3p] Bestäm samtliga stationära punkter till funktionen

$$f(x, y) = xy e^{x-2y}$$

samt avgör deras karaktär.

- (b) [2p] Argumentera varför det finns lösning till problemet

$$\begin{aligned} \min \quad & xy \\ \text{sådant att} \quad & x^2 + y^2 = 8 \\ & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

och bestäm minimivärdet av funktionen med dessa bivillkor.

Facit.

- (a) Funktionen är differentierbar i \mathbb{R}^2 eftersom den kan skrivas som en produkt och en sammansättning av differentierbara funktioner.

Gradienten blir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y(1+x)e^{x-2y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x(1-2y)e^{x-2y}.$$

Så finns det två stationära punkter

$$p_1 = (0, 0), \quad p_2 = \left(-1, \frac{1}{2}\right).$$

Andra ordning partiella derivator blir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = y(x+2)e^{x-2y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = (1+x)(1-2y)e^{x-2y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -4x(1-y)e^{x-2y}.$$

Den kvadratiska formen associerad till punkten p_1 blir

$$Q_{p_1}(x, y) = 2xy,$$

som är en indefinit form, så gäller att p_1 är en sadelpunkt.

Den kvadratiska formen associerad till punkten p_2 blir

$$Q_{p_2}(x, y) = \frac{1}{2}e^{-2}x^2 + 2e^{-2}y^2$$

som är positivt definit. Då gäller att p_2 är en lokal minimipunkt.

- (b) Funktionen $f(x, y) = xy$ är kontinuerlig ty är det en polynom. Dessutom kurvan $x^2 + y^2 = 8$ är cirkeln av radie $2\sqrt{2}$, som är en kompakt mängd. Så Extremvärdesatsen ger oss att både maximi- och minimivärdet antas i mängden.

Båda kostnadsfunktionen och bivillkor ges av differentierbara funktioner. Så extrempunkter (x, y) måste uppfylla att

$$0 = \det \begin{pmatrix} y & 2x \\ x & 2y \end{pmatrix} = 2(x^2 - y^2) = 2(x-y)(x+y).$$

Därför gäller att $x = y$ eller $x = -y$. Om vi sätter in dessa villkor i bivillkoret, får vi att $x = \pm 2$. Så får vi 4 möjliga extrempunkter:

$$(2, 2), \quad (-2, -2), \quad (-2, 2), \quad (2, -2).$$

Så får vi att minimivärdet av funktionen med dessa bivillkor är -4 och antas i punkterna $(-2, 2)$ och $(2, -2)$.

Teoridel

5. (a) [1p] Komplettera texten nedan:

Vi säger att mängden $M \subset \mathbb{R}$ **inte** är uppåt begränsad om

$$\frac{\quad}{(1)} B \in \mathbb{R} \quad \frac{\quad}{(2)} x \in M \quad \text{sådant att} \quad x \frac{\quad}{(3)} B.$$

Skriv hela påståendet i ditt svar, med text eller kvantifikatorer.

(b) [1p] Definiera begreppet *konvergent serie*.

(c) [1p] Definiera begreppet *inre punkt* för en mängd $M \subset \mathbb{R}^n$, där $n \geq 1$.

(d) [2p] Låt $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vara funktionen definierad enligt

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{om } x \text{ är irrationellt,} \\ 1 & \text{om } x \text{ är rationellt.} \end{cases}$$

Visa att funktionen f inte är integrerbar på intervallet $[0, 1]$.

Facit.

(a) "För varje $B \in \mathbb{R}$, finns det ett tal $x \in M$ sådant att $x > B$."

(b) Se kurslitteratur.

(c) Se kurslitteratur.

(d) Låt Φ vara en trappfunktion sådan att $\Phi \leq f$ för alla $x \in [0, 1]$. Låt $I = (s, t) \subset [0, 1]$ vara en delintervall där Φ är konstant, säg $\Phi(x) = c$. Eftersom varje intervall innehåller både rationella och irrationella tal, finns det $x_1, x_2 \in I$ sådana att x_1 är rationellt och x_2 är irrationellt. Av definitionen av f följer då att

$$f(x_1) = -3, \quad f(x_2) = 1.$$

Eftersom $\Phi \leq f$ på I , måste särskilt

$$c = \Phi(x_1) \leq f(x_1) = -3.$$

Alltså gäller

$$\Phi(x) \leq -3, \quad x \in I.$$

Eftersom är Φ en trappfunktion, medför det att

$$\Phi(x) \leq -3, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Det visar att

$$\int_0^1 f(x) dx = \sup_{\phi \leq f} \int_0^1 \phi(x) dx \leq -3.$$

Å andra sidan är konstantfunktionen $\Phi(x) = -3$ en trappfunktion som uppfyller $\Phi \leq f$, vilket ger

$$\int_0^1 f(x) dx \geq -3,$$

som medför att

$$\underline{\int_0^1} f(x) dx = -3.$$

Ett liknande argument visar att

$$\overline{\int_0^1} f(x) ds = 1.$$

Därför är funktionen f inte integrerbar eftersom $\overline{\int_0^1} f(x) ds > \underline{\int_0^1} f(x) ds$.

6. (a) [1p] Formulera satsen om mellanliggande värden för funktioner av en variabel.
 (b) [2p] Formulera och bevisa medelvärdesatsen för integraler.
 (c) i. [1p] Visa att för varje $a, b \in \mathbb{R}$ gäller att $|a - b| \geq ||a| - |b||$. Använd detta för att visa att om $|x - 1| \leq 1$ så gäller att $|x - 3| \geq 1$.
 ii. [1p] Visa direkt ur definitionen av gränsvärde att

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{-1}{2}$$

för funktionen $f(x) = \frac{x}{x-3}$.

Facit.

- (a) Se kursmaterialet.
 (b) Se kursmaterialet.
 (c) i. Triangelolikheten ger oss att

$$|a| \leq |a - b| + |b|, \quad |b| \leq |b - a| + |a|.$$

Det medför att

$$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|,$$

so är ekvivalent med $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Om vi använder det, med $a = 2$ och $b = |x - 1|$, får vi att

$$|x - 3| = |2 - (x - 1)| \geq ||2| - |x - 1|| = 2 - |x - 1| \geq 1,$$

för $|x - 1| \leq 1$.

- ii. Vi noterar att

$$\left| \frac{x}{x-3} + \frac{1}{2} \right| = \frac{3}{2|x-3|} |x-1| \leq \frac{2}{3} |x-1|,$$

om $|x - 1| \leq 1$. Givet $\varepsilon > 0$, låt

$$0 < \delta < \min\left(\frac{3\varepsilon}{2}, 1\right).$$

Därför, om $0 < |x - 1| < \delta$ så gäller att

$$\left| f(x) - \frac{-1}{2} \right| < \varepsilon.$$