LÖSNINGAR TILL LINJÄR ALGEBRA II, 2019-03-22

Uppgift 1. Vi har att

$$0 = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix}\text{(Drag } x\cdot\text{(rad 1)} \\ \text{från rad 3)}\end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-x^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix}\text{(Utveckla efter} \\ \text{rad 1)}\end{matrix} =$$

$$= (-1)^{1+3}(1-x^2)\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix}\text{(Utveckla efter} \\ \text{rad 2)}\end{matrix} =$$

$$= (1-x^2)(-1)^{2+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = -(x^2-1)^2$$

Lösningarna till determinantekvationen är alltså $x = -1$ och $x = 1$.

Uppgift 2. Enligt definitionen av T gäller att

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = (x^3 + x)(2a_2 + 6a_3x) - 2x^2(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2) =$$

$$= 2a_2x - 2(a_1 - 3a_3)x^2 - 2a_2x^3 \tag{1}$$

Av (1) följer att

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = 0 \iff a_2 = a_1 - 3a_3 = 0 \iff a_2 = 0, a_1 = 3a_3.$$

Dvs T:s nollrum

$$N(T) = \{a_0 + 3a_3x + a_3x^3 \mid a_0, a_3 \text{ är godtyckliga}\} =$$

$$= \{a_0 + a_3(x^3 + 3x) \mid a_0, a_3 \text{ är godtyckliga}\} = [1, x^3 + 3x].$$

Polynomen $1, x^3 + 3x$ är linjärt oberoende (de är inte proportionella) och är alltså tillsammans en bas i $N(T)$.

Av (1) följer också att T:s värderum

$$V(T) = \{2a_2x - 2(a_1 - 3a_3)x^2 - 2a_2x^3 \mid a_1, a_2, a_3 \text{ är godtyckliga}\} =$$

$$= \{-2(a_1 - 3a_3)x^2 + 2a_2(-x^3 + x) \mid a_1, a_2, a_3 \text{ är godtyckliga}\} = [x^2, x^3 - x].$$

Polynomen $x^2, x^3 - x$ är linjärt oberoende (de är inte proportionella) och är alltså tillsammans en bas i $V(T)$.

Av (1) följer slutligen också att $T(1) = 0$, $T(x) = -2x^2$, $T(x^2) = 2x-2x^3$, $T(x^3) = 6x^2$. T:s matris i basen $1, x, x^2, x^3$ är alltså matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uppgift 3. Eftersom

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

har vi att

$$A^*A = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Egenvärdena till A^*A är lösningarna till ekvationen $\det(A^*A - \lambda I) = 0$. Uträkning ger att A^*A har egenvärdena $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = 9$ och $\lambda_3 = 0$, vilket ger att A har singulära värden $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 5$ och $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 3$.

Egenrummet för egenvärdet λ_i ges av nollrummet till matrisen $(A^*A - \lambda I)$. Explicita uträkningar (som studenter borde skriva ner) ger att egenrummet för egenvärdet $\lambda_1 = 25$ ges av $\mathrm{Span}(1,1,0)^t$. En ON-bas för egenrummet till λ_1 ges av $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$.

Egenrummet för egenvärdet $\lambda_2 = 9$ ges av $\mathrm{Span}(-1,1,-4)^t$. En ON-bas för egenrummet till λ_2 ges av $v_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-1,1,-4)$.

Egenrummet för egenvärdet $\lambda_3 = 0$ ges av $\mathrm{Span}(-2,2,1)^t$. En ON-bas för egenrummet till λ_2 ges av $v_2 = \frac{1}{3}(-2,2,1)$.

Låt nu V vara matrisen vars i:te kolonn är v_i, d.v.s.

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Nu hittar vi en ON-bas (u_1, u_2) för $\mathbb{R}^2$ där $u_1 = \frac{1}{\sigma_1}Av_1$ och $u_2 = \frac{1}{\sigma_2}Av_2$. Låt nu U vara matrisen vars i:te kolonn är u_i, d.v.s

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Slutligen, låt S vara av samma storlek som A (d.v.s. 2×3) och ges av

$$S_{ij} = \begin{cases} \sigma_i & \text{om } i = j \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Det följer nu att vi har en singulärvärdesdekomposition

$$A = USV^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{Tr}.$$

Uppgift 4. Vi löser uppgiften med hjälp av Gram-Schmidts process. Om $u_1 = (1,1,0,0)$, $u_2 = (1,0,1,0)$, $u_3 = (1,0,0,1)$ då gäller att första vektorn i ON-basen ges av

$$v_1 = u_1/|u_1| = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0).$$

Vektorn w_2 som är ortogonal mot v_1 ges av

$$w_2 = u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 = (1,0,1,0) - \frac{1}{2}(1,1,0,0) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0).$$

Den andra vektorn i ON-basen blir

$$v_2 = w_2/|w_2| = \sqrt{\frac{2}{3}}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0).$$

Vektorn w_3 som är ortogonal mot v_1 och v_2 ges av

$$w_3 = u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2 = (1,0,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,0,0) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0) = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1).$$

Den tredje vektorn i ON-basen blir

$$v_3 = w_3/|w_3| = \sqrt{\frac{3}{4}}(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1).$$

Uppgift 5. Först beräknar vi all egenvärden.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 8 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((4-\lambda)^2 - 16 = \lambda(2-\lambda)(\lambda-8).$$

Vi får $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 8$. Eftersom alla egenvärnden är ilka är matrisen diagonaliserbar. Däremot är matrisen inte ortogonalt diagonaliserbar eftersom endast symmetriska matriser är det.

Uppgift 6. Man använder Gausselimination för att lösa uppgiften.

$$\begin{cases} x + 2y + az = 6 \\ 2x - 2y + 4z = 2 \\ 3x - 2y + 3az = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + az = 6 \\ -6y + (4-2a)z = -10 \\ -8y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + az = 6 \\ y = 1 \\ 3y + (a-2)z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + az = 6 \\ y = 1 \\ (a-2)z = 2 \end{cases}.$$

Detta medför följande.

Fall 1. $a = 2$ inga lösningar.

Fall 2. $a \neq 2$. $z = \frac{2}{a-2},\ y = 1,\ x = \frac{2a-8}{a-2}$.