MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik

Lösningsförslag till tentamen i Linjär algebra II, 19 augusti 2019

(1) Determinanten räknas ut och blir $-x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x + 3$. Lösningarna är $x = 1$ (dubbelrot), $x = -1$ och $x = 3$.

(2) Man har

$$\begin{cases} T(1) = 0 \\ T(x) = -2x^2 \\ T(x^2) = -2x^3 + 2 \\ T(x^3) = 6x \end{cases}$$

T:s matrix i basen $\{1, x, x^2, x^3\}$ blir lika med

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dess rank är lika med 3 och en bas i bilden består av t.ex. $T(x), T(x^2)$ och $T(x^3)$. Nollrummet spänns upp av konstanten 1.

(3) Svar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{Tr}.$$

(4) Vi använder Gram-Schmidts ortogonalisering för $v_1 = (1,0,0,1)$; $v_2 = (1,1,0,0)$; $v_3 = (1,0,1,0)$. Den första vektorn in ON-basen ges av

$$o_1 = v_1/|v_1| = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1).$$

Sedan $w_2 = v_2 - (o_1, v_2)o_1 = (1,1,0,0) - (\frac{1}{\sqrt{2}})^2(1,0,0,1) = (\frac{1}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2})$. Den andra vektorn in ON-basen ges av

$$o_2 = w_2/|w_2| = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2}\right).$$

Vidare $w_3 = v_3 - (o_1, v_3)o_1 - (o_2, v_3)o_2 = (1,0,1,0) - \frac{1}{2}(1,0,0,1) - \frac{1}{3}(\frac{1}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2}) = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{3})$. Den tredje vektorn in ON-basen ges av

$$o_3 = w_3/|w_3| = \sqrt{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{3}\right).$$

(5) Den karakteristiska ekvationen ger $0 = \det(A - \lambda E) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda - 5 = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 5)$ vilket ger egenvärden 1 med multiplicitet 2 och -5. Egenvektorerna med egenvärde 1 är icke-triviala lösningar till systemet

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

d.v.s $(x, y, z) = s(2, 0, 1) + t(0, 2, 1)$ där $s, t \in \mathbb{R}$och $s^2 + t^2 \neq 0$, Egenvektorerna med egenvärde -5 är icke-triviala lösningar till systemet

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

d.v.s $(x, y, z) = r(-1, -1, 2)$ där $0 \neq r \in \mathbb{R}$. Sätt $u_1 = (2, 0, 1),\ u_2 = (0, 2, 1),\ u_3 = (-1, -1, 2)$. Då A är symmetrisk så är u_3 ortogonal mot både u_1 och u_2. Det återstår att normera u_1 och u_2. Gram-Schmidts ortogonalisering ger:

$$v_1 = \frac{u_1}{|u_1|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1), \quad u_2' = u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 = \frac{2}{5}(-1, 5, 2), \quad v_2 = \frac{u_2'}{|u_2'|} = \frac{1}{\sqrt{30}}(-1, 5, 2).$$

Till slut $v_3 = \frac{u_3}{|u_3|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)$. Då är v_1, v_2, v_3 egenvektorer till A som bildar en ON-bas i $\mathbb{R}^3$.

(6) Vi använder Gausselimination och får

$$\begin{cases} x & +y & +z = 2 \\ x & +2y & +2z = 3 \\ x & +4y & +az = b. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x & +y & +z = 2 \\ & y & +z = 1 \\ & 3y & +(a-1)z = b - 2. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x & & = 1 \\ & y & +z = 1 \\ & & (a-4)z = b - 5. \end{cases}$$

Ifall $a \neq 4$ gäller $x = 1,\ y = \frac{a-b+1}{a-4},\ z = \frac{b-5}{a-4}$.

Ifall $a = 4,\ b \neq 5$ lösningar saknas.

Ifall $a = 4,\ b = 5$ finns det en familj av lösningar given av $x = 1,\ y = 1 - z$ där z är ett godtyckligt reellt tal.