

**Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift är värd 5 poäng och 15 poäng ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant.**

1. a) Vad menas med att en mängd  $\{v_1, \dots, v_n\}$  av vektorer i ett komplext vektorrum är linjärt oberoende?  
b) Avgör huruvida

$$W = \left\{ \left( \begin{array}{c} 0 \\ -i \\ -5 \\ 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ i \\ 1+i \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} -1+i \\ 1-i \\ 1+i \\ 2 \end{array} \right) \right\}$$

utgör en linjärt oberoende mängd i  $\mathbb{C}^4$ . Beräkna även  $\dim(\text{span}(W))$ .

2. Betrakta  $\mathbb{C}^3$  utrustat med inre produkten  $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  definierad genom

$$\langle x, y \rangle = x_1 \bar{y}_1 + 4x_2 \bar{y}_2 + x_3 \bar{y}_3.$$

(a) Ange en ortonormal bas för  $\mathbb{C}^3$  relativt denna inre produkt.

(b) Bestäm ortogonala komplementet till delrummet  $U = \text{span} \left\{ \left( \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right) \right\}$ .

3. Låt  $P_3(\mathbb{R})$  beteckna vektorrummet av reella polynom av grad högst tre. Betrakta den linjära avbildningen

$$T: P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R}), \quad p \mapsto p''' + 2x^2 p''.$$

Bestäm baser för nollrummet  $\mathcal{N}(T)$  och bildrummet  $\mathcal{R}(T)$  samt ange avbildningens rang.

4. Bestäm samtliga singulära värden till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ange en singularvärdessuppdelning för matrisen  $A$ .

5. Betrakta vektorrummet  $P_2(\mathbb{R})$  bestående av reella polynom av grad högst två utrustat med inre produkten

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)x(1-x)dx.$$

Bestäm en ortonormal bas för  $P_2(\mathbb{R}^2)$  relativt denna inre produkt.

6. Definiera begreppen normal matris och självadjungerad matris. Visa att för en godtycklig komplex matris  $A$ , ej nödvändigtvis kvadratisk, så är matrisen  $A^*A$  självadjungerad. Visa vidare att egenvärdena till  $A^*A$  är icke-negativa.

Skrivningsåterlämning äger rum fredagen 8 november kl. 10:30 utanför sal 15, hus 5. Därefter kan skrivningen hämtas på studentexpeditionen i rum 204.