MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Yishao Zhou

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
den 26 oktober 2020

Varje uppgift är värd 5 poäng och 15 poäng ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant.

---

1. Låt W vara det delrum av $P_4 = \{p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 : p_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, 3, 4\}$ som spänns upp av vektorerna

   $$v_1 = 1 + 2x + x^2 + 3x^4, v_2 = -1 - 2x^2 + x^3 - 2x^4, v_3 = 2 + x - 4x^2 + 3x^4, v_4 = -1 + x + x^3 - x^4.$$

   Bestäm dimensionen för W. Ange en bas för W. 5 p

2. Låt $H = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ vara ett hyperplan i $\mathbb{R}^4$ och låt $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ges av spegling i H. Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer för T. Är T diagonaliserbar? 5 p

3. Låt T vara en linjär avbildning på $M_{2\times 2}$ som definieras genom $T(X) = A^*X + XA$, där $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Ange matrisen för T i standardbasen för $M_{2\times 2}$. Bestäm $\mathcal{N}(T)$. Är matrisekvationen $T(X) = Q$ entydigt lösbar för alla $Q \in M_{2\times 2}$? 5 p

4. Ange en singulärvärdesuppdelning för matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Skriv vidare A på formen $A = QS$ där Q är en ortogonal matris och S är en symmetrisk matris med positiva egenvärden. Visa att alla inverterbara reella matriser A kan entydigt skrivas på denna form. Ge en geometrisk tolkning av denna matrisuppdelning. 5 p

5. Bestäm den adjungerade operatorn till T på $\mathbb{C}^3$ relativt standard inre produkten genom

   $$T((z_1, z_2, z_3)) = (2z_2 + iz_3, iz_1, z_2).$$

   Är T normal? Är T självadjungerad? 5 p

6. Antag att V är ett vektorrum över F. Vad menas med en inre produkt på V? Visa att

   $$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_1 + 2x_1y_2 + 5x_2y_2 + x_3y_3$$

   är en inre produkt på $\mathbb{R}^3$. Beräkna det största och minsta värdet av

   $$q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + x_3^2$$

   då $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. 5 p

För tentamensåterlämning besök `https://survey.su.se/Survey/37054/sv`