MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Yishao Zhou

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
den 25 november 2020

Varje uppgift är värd 5 poäng och 15 poäng ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant.

---

1. Låt $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ beteckna mängden av alla tal av typen $a+b\sqrt{2}$, där a och b är rationella tal. Visa att, med de naturliga definitionerna av addition och skalär multiplikation, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ är ett vektorrum över $\mathbb{Q}$. Bestäm dimension av $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Ange en bas. 5 p

2. Betrakta $V = \mathbb{C}$ som vektorrummet över $\mathbb{R}$. Definera $T : V \to V$ genom $T(z) = \bar{z}$, där $\bar{z}$ är z:s komplexa konjugate. Visa att T är linjär. Bestäm $\dim(V)$. Betrakta vidare $V = \mathbb{C}$ vara vektorrummet över $\mathbb{C}$. Bestäm $\dim(V)$. Är avblidningen T_1 på V genom $T_1(z) = \bar{z}$ linjär? 5 p

3. Låt W vara det delrum av $P_4 = \{p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 : p_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, 3, 4\}$ som spänns upp av vektorerna

   $$v_1 = 1 + 2x + x^2 + 3x^4, v_2 = -1 - 2x^2 + x^3 - 2x^4, v_3 = 2 + x - 4x^2 + 3x^4, v_4 = -1 + x + x^3 - x^4.$$

   Bestäm $W^\perp$ relativt inre produkten

   $$\langle p, q\rangle = p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 + p_4q_4, \text{ för } p, q \in P_4.$$

   5 p

4. Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till den linjära avbildning T på ett n-dimensionellt vektorum V genom $T(e_i) = e_{i+1}$ för $i = 1, ..., n-1$ och $T(e_n) = e_1$ där $B = \{e_1, ..., e_n\}$ är en bas för V. Låt $A = [T]_B$ och låt $p(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}$ vara ett polynom. Beräkna determinanten till matrisen $p(A)$. (Att göra $n = 5$ ger delpoäng.) 5 p

5. Visa att matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ är normal. Bestäm en unitär matris U så att A blir diagonaliserad. 5 p

6.
   (a) Vad betyder $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ har rang k? Hur stort kan k vara?

   (b) Vad är kolonnerna till matriserma U och V i singulärvärdesuppdelning för $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ med rang k, $A = U\Sigma V^t$, med avseende på bildrum och nollrum till A och A^t. Hur ser Σ ut?

   (c) Låt nu $\{c_1, ..., c_k\} \subset \mathbb{R}^m$ vara en bas för $\mathcal{R}(A)$ och $\{r_1, ..., r_k\} \subset \mathbb{R}^n$ vara en bas för $\mathcal{R}(A^t)$. Definiera matriserna C och R genom $C = (c_1, c_2, ..., c_k)$ och $R = (r_1, r_2, ..., r_k)^t$. Visa att det finns en inverterbar $k \times k$-matris M så att $A = CMR$.

   5 p

För tentamensåterlämning besök `https://survey.su.se/Survey/37054/sv`