Lösningsförslag till Matematik II–Linjär algebra den 25/11 2020

1. (a) Låt $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ beteckna mängden av alla tal av typen $a+b\sqrt{2}$, där a och b är rationella tal. Visa att, med de naturliga definitionerna av addition och skalär multiplikation, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ är ett vektorrum över $\mathbb{Q}$. Bestäm dimension av $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Ange en bas.

   (b) Är $W = \{A \in \mathbb{M}_{n\times n} : \operatorname{tr}(A) = 0\}$ ett delrumm till $\mathbb{M}_{n\times n}$?

   Lösningsförslag. (a) Med definition direkt: Först visar vi att $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ är sluten under addition och multiplikation. Detta följer av att, för $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Q}$,

   $$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (\underbrace{a + c}_{\in\mathbb{Q}}) + (\underbrace{c + d}_{\in\mathbb{Q}})\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

   och

   $$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (\underbrace{ac + 2bd}_{\in\mathbb{Q}}) + (\underbrace{ad + bc}_{\in\mathbb{Q}})\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}].$$

   Addition är kommutativ och associativ på $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ eftersom den är $\mathbb{R}$.

   Existens av identitet 0 för addition följs av $0 = 0 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

   Inversen av $a + b\sqrt{2}$ är $-(a + b\sqrt{2})$ eftersom $-(a + b\sqrt{2}) = -a + (-b)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

   För varje $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ har vi $1 \cdot (a + b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$.

   För varje $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ och $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ gäller att

   $$\alpha \cdot ((a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2})) = \alpha(a + b\sqrt{2}) + \alpha(a + b\sqrt{2})$$

   och

   $$(\alpha + \beta) \cdot (a + b\sqrt{2}) = \alpha \cdot (a + b\sqrt{2}) + \beta \cdot (a + b\sqrt{2})$$

   då multiplikation är kommutativ och associativ på $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ eftersom den är kommutativ och associativ på är $\mathbb{R}$.

   Vi har bevisat att $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ är ett vektorrum över $\mathbb{Q}$.

   Det är lätt att inse att $1, \sqrt{2}$ är linjärt oberoende eftersom för $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$

   $$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot \sqrt{2} = 0$$

   medför att $\alpha = \beta = 0$ och alla vektorer i $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ kan skrivas på formen $a + b\sqrt{2}$ med a, b rationella så $\{1, \sqrt{2}\}$ utgör en bas för $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ och dimension av $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ är 2.

   Ett annat alternativ är att betrakta $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ som en delmängd av vektorrummet $\mathbb{R}$. Vi har bevisat att att $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ är sluten under addition och multiplikation. Då är $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ett delrum till $\mathbb{R}$. Således är $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ett vektorrum.

   (b) Ja eftersom för godtyckliga vektorer $A, B \in W$ gäller $\operatorname{tr}(A) = 0$ och $\operatorname{tr}(B) = 0$,

   $$\Rightarrow \operatorname{tr}(\alpha A+\beta B) = \operatorname{tr}(\alpha A)+\operatorname{tr}(\beta B) = \alpha\operatorname{tr}(A)+\beta\operatorname{tr}(B) = 0,\ \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha A+\beta B \in W.$$

2. Betrakta $V = \mathbb{C}$ som vektorrummet över $\mathbb{R}$. Definera $T : V \to V$ genom $T(z) = \bar{z}$, där $\bar{z}$ är z:s komplexa konjugate. Visa att T är linjär. Bestäm $\dim(V)$. Betrakta vidare $V = \mathbb{C}$ vara vektorrummet över $\mathbb{C}$. Bestäm $\dim(V)$. Är avbildningen T_1 på V genom $T_1(z) = \bar{z}$ linjär?

Lösningsförslag. För godtyckliga reella tal α_1, α_2 och godtyckliga $z_1, z_2 \in V$ har vi enligt räknereglerna för komplexa tal och definition dför T

$$T(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = \overline{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2} = \overline{\alpha}_1 \overline{z}_1 + \overline{\alpha}_2 \overline{z}_2 = \alpha_1 \overline{z}_1 + \alpha_2 \overline{z}_2 = T(z_1) + T(z_2)$$

så T är en linjär avbildning på V över $\mathbb{R}$.

Eftersom för $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ $\alpha_1 1 + \alpha_2 i = 0$ medför att $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ och alla vektorer i V kan skrivas på formen $\alpha + i\beta$ där $\alpha, \beta \in V$ är $1, i$ utgör $\{1, i\}$ en bas för V och $\dim(V) = 2$.

Om $V = \mathbb{C}$ är ett vektorrum över $\mathbb{C}$, är T_1 inte linjär eftersom

$$T_1(\alpha z) = \overline{\alpha z} = \bar{\alpha}\bar{z} \neq T_1(z)\alpha \in \mathbb{C}$$

3. Låt W vara det delrum av $P_4 = \{p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + p_4 x^4 : p_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, 3, 4\}$ som spänns upp av vektorerna

$$v_1 = 1 + 2x + x^2 + 3x^4, v_2 = -1 - 2x^2 + x^3 - 2x^4, v_3 = 2 + x - 4x^2 + 3x^4, v_4 = -1 + x + x^3 - x^4.$$

Bestäm $W^\perp$ relativt inre produkten

$$\langle p, q \rangle = p_0 q_0 + p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 + p_4 q_4, \text{ för } p, q \in P_4.$$

Lösningsförslag. För varje vektor $p = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + p_4 x^4 \in W^\perp$ gäller att

$$\langle v_i, p \rangle = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

vilket är ekvivalent med

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Genom Gauss elimination får vi

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sätt $p_3 = 5s, p_4 = 5t$. Då $p_2 = s - t$, $p_1 = -2s - 3t$, $p_0 = 3s - 8t \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} t.$$

Det ger en bas för $W^\perp$: $w_1 = 3 - 2x + x^2 + 5x^3$, $w_2 = -8 - 3x - x^2 + x^4 \Longrightarrow W^\perp = \text{span}\{w_1, w_2\}$.

4. Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till den linjära avbildning T på ett n-dimensionellt vektorum V genom $T(e_i) = e_{i+1}$ för $i = 1, ..., n-1$ och $T(e_n) = e_1$ där $B = \{e_1, ..., e_n\}$ är en bas för V. Låt $A = [T]_B$ och låt $p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}$ vara ett polynom. Beräkna determinanten till matrisen $p(A)$. (Att göra $n = 5$ ger delpoäng.)

Lösningsförslag.. Det är lätt att få matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi beräknar determinanten genom Laplace utveckling enligt rad 1:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda \end{vmatrix}}_{n\times n} = \lambda \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda \end{vmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)} + (-1)^{1+n}(-1) \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$= \lambda \cdot \lambda^{n-1} + (-1)^{n+2}(-1)^{n-1} = \lambda^n - 1.$$

Så egenvärden är rötterna till den binomiska ekvationen $\lambda^n = 1$: $\lambda_k = \omega_n^k$, $k = 0, 1, ..., n-1$ där $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Egenvärden till $p(A)$ är $p(w_n^k)$, $k = 0, 1, ..., n-1$. Så $\det(A) = \prod_{k=0}^{n-1} p(w_n^k)$

Eftersom det finns n olika egenvärden finns det n linjär oberoende egenvektorer, dvs, matrisen $\lambda_k - A$ har rang $n-1$. Så ekvationssystemmet

$$Av^{(k)} = \omega_n^k v^{(k)}$$

har en parametrig lösning. Om vi väljer $v_1^{(k)} = 1$ får vi egenvektorer

$$v^{(k)} = (1, w_n^{-k}, w_n^{-2k}, ..., w_n^{-(n-1)k})^*, \ k = 0, ..., n-1.$$

5. Visa att matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ är normal. Bestäm en unitär matris U så att A blir diagonaliserad.

Lösningsförslag. Notera att $A = 3I_3 + H$ där $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ uppfyller $H^t = -H$. Då

$$A^t A = (3I_3 + H)^t(3I_3 + H) = 9I_3 + 3H + 3H^t + H^t H = 9I_3 - H^2,$$

$$AA^t = (3I_3 + H)(3I_3 + H)^t = 9I_3 + 3H^t + 3H + HH^t = 9I_3 - H^2.$$

Det innebär $AA^t = A^t A$ så A är normal. Matrisen kan således diagonaliseras med hjälp av en unitär matris.

Eftersom $H^t = -H$ är 0 ett egenvärde till H gör matrisuppdelningen ovan lättare att beräkna egenvärden. Låt λ vara ett egenvärd till A. Då gäller att $\lambda = 3+\mu$ där μ är egenvärde till H. Det karakteristiska polynomet till H är $\mu(\mu^2+9)$ har rötterna $0, 3i, -3i$ Således har A egenvärden $3, 3+3i, 3-3i$. Motsvarande normaliserade egenvektorer är

$$\frac{1}{3}(2,-2,1), \frac{1}{6}(-1-3i, 1-3i, 4), \text{ och } \frac{1}{6}(-1+3i, 1+3i, 4),$$

Så om vi sätter

$$U = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -1-3i & -1+3i \\ 4 & 1-3i & 1+3i \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ och } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3+3i & 0 \\ 0 & 0 & 3-3i \end{pmatrix}$$

är matrisen U initär och $U^*AU = D$.

6. (a) Vad betyder $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ har rang k? Hur stort kan k vara?
   (b) Vad är kolonnerna till matriserma U och V i singulärvärdesuppdelning för $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ med rang k, $A = U\Sigma V^t$, med avseende på bildrum och nollrum till A och A^t. Hur ser Σ ut?
   (c) Låt nu $\{c_1, ..., c_k\} \subset \mathbb{R}^m$ vara en bas för $\mathcal{R}(A)$ och $\{r_1, ..., r_k\} \subset \mathbb{R}^n$ vara en bas för $\mathcal{R}(A^t)$. Definiera matriserna C och R genom $C = (c_1, c_2, ..., c_k)$ och $R = (r_1, r_2, ..., r_k)^t$. Visa att det finns en inverterbar $k \times k$-matris M så att $A = CMR$.

Lösningsförslag. (a) Se boken.

(b) Notera att

$$A = U\Sigma V^t \quad \text{är ekvivalent med } AV = U\Sigma$$

där $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ med Σ_1 en $(k \times k)$-diagonalmatris singulärvärden på diagonalen och således inverterbra.

Låt kolonner i U and V vara $u_1, ..., u_m$ respektive $v_1, ..., v_n$. Då är $u_1, ..u_m$ ortonormerade och det samma för $v_1, ..., v_n$. Vi har

- $Av_i = 0$ och $A^t u_i = 0$ för $i > r$, dvs,

  $$\mathcal{N}(A) = \text{span}\{v_{r+1}, ..., v_n\}, \quad \mathcal{N}(A^t) = \text{span}\{u_{r+1}, ..., u_m\}$$

  men $\mathcal{N}(A) = \mathcal{C}(A^t)^\perp$ respektive $\mathcal{N}(A^t) = \mathcal{C}(A)^\perp$. Så $v_1, ..., v_r$ är en ON-bas för radrummet och $u_1, ..., u_r$ är en ON-bas för kolonnrummet.
- Om vi betraktar A som en linjär avbildning från radrummet till kolonnrummet så innebär $Av_i = \sigma_i u_i$ för $i = 1, ..., r$ att matrisrepresentation för A i basen $v_1, ..., v_r$ i radrummet är en diagonalmatris i ON-basen $u_1, ..., u_r$ (i kolonnrummet).

(c) Om $\{c_1, ..., c_k\}$ och $\{r_1, ..., r_k\}$ fås från SVD då är $M = \Sigma_1$ vilket följer av att

$$A = (U_1, U_2)\begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(V_1, V_2)^t = U_1 \Sigma_1 V_1^t$$

med $U_1 = (c_1, ..., c_k)$ och $V_1 = (r_1, ..., r_k)$.

Vi vet att det finns en inverterbar $(k \times k)$-matris P sådan att $\underbrace{(u_1, ..., u_k)}_{U_1} = (c_1, ..., c_k)P$ och det finns en inverterbar $(k\times)k$-matris Q sådan att $\underbrace{(v_1, ..., v_k)}_{V_1} = (r_1, ..., r_k)Q$. Då gäller

$$A = U_1 \Sigma_1 V_1^t = CP\Sigma_1 (RQ)^t = C \underbrace{(P\Sigma_1 Q^t)}_{M} R.$$

Matrisen $M = P\Sigma_1 Q^t$ är inverterbar eftersom matriserna P, Q och $Sigma_1$ är inverterbara.