MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Yishao Zhou

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
den 19 augusti 2021

Varje uppgift är värd 5 poäng och 15 poäng ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas.

---

1. (i) Låt $P_2(\mathbb{R})$ beteckna det reella vektorrummet bestående av polynom av grad högst 2. Bestäm det linjära sambandet mellan baserna

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\} \quad \text{och} \quad \mathcal{B}' = \{1, 1+x, 1+x^2\}$$

Ange matrisen $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_{\text{st}}}$ och $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}_{\text{st}}}$ för den linjära avbildningen $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definierad genom

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(-1) & p(0) \end{pmatrix}$$

där $\mathcal{B}_{\text{st}}$ är standardbasen i $M_2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{B}_{\text{st}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(ii) Bestäm nollrummet till matrisen $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}_{\text{st}}}$.

5 p

2. (i) Låt $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ och $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Visa att matrisen $(b \; Ab \; A^2b \; A^3b)$ är inverterbar.

(ii) Låt nu $\tilde{A}$ vara en 4×4-matris och $\tilde{b}$ en kolonnvektor med 4 element så att $M = (\tilde{b} \; \tilde{A}\tilde{b} \; \tilde{A}^2\tilde{b} \; \tilde{A}^3\tilde{b})$ är inverterbar.

Visa att $M^{-1}\tilde{A}M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 \end{pmatrix}$ och $M^{-1}\tilde{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ och att a_0, a_1, a_2, a_3 beror enbart på matrisen $\tilde{A}$.

5 p

3. (i) Vilka av följande former på P_2, rummet av alla reella polynom av grad högst lika med 2, är inre produkter?
(a) $\langle p, q\rangle = p(0)q(0)$, (b) $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$.

(ii) Beräkna $\langle t+1, t^2+t\rangle$ för var och en av inre produkterna i (i).

5 p

4. (i) Låt V vara vektorrummet av alla oändligt deriverbara funktioner på $\mathbb{R}$ som är periodiska med period 1, och förse V med inre produkt $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Visa att $D^* = -D$ där D^* är den adjungerande operatorn till deriveringsoperatorn D.

(ii) Är D själv adjungerad, normal?

5 p

5. (i) Visa att unionen av alla cirkelskivor $K_i := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - a_{ii}| \le \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} |a_{ik}|\}$, $i = 1, .., n$, innehåller alla egenvärden till $n \times n$-matrisen A med element a_{ij}.

(ii) Bestäm ett område där alla egenvärden till matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ligger.

(iii) Bestäm ett område där alla nollställen till polynomet $p(s) = s^4 - 2s^3 - 2s^2 + s + 8$ ligger.

5 p

6. (i) Låt V vara ett vektorrum. Visa, för alla $v \in V$ och alla skalärer α, att
(a) $0v = \mathbf{0}$, (b) $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

(ii) Visa att för varje vektor v i ett vektorrum V är $-v = (-1)v$. Speciellt följer det att vektorn $-v$ är entydigt bestämd av v.

5 p

För tentamensåterlämning besök `https://survey.su.se/Survey/37054/sv`

Lösnimngsförslag:

1. (i) Det linjära sambandet mellan $\mathcal{B}$ och $\mathcal{B}'$ ges av $(1, 1+x, 1+x^2) = (1, x, x^2)A$ där $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Kalla i tur och ordning basvektorer i $\mathcal{B}_{textst}$ $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$. En direkt beräkning ger

$$T(1, x, x^2) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_{\mathrm{st}}}}.$$

$$T(1, 1+x, 1+x^2) = T((1, x, x^2)A) = (T(1, x, x^2))A = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_{\mathrm{st}}} A$$
$$= (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}_{\mathrm{st}}}}.$$

(ii) Vi kan bevisa att matrisen $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}_{\mathrm{st}}}$ har rang 3. Enligt dimensionssatsen är dimensionen till nollrummet lika med noll. Så nollrummet är $\{(0, 0, 0)\}$.

2. (i) Matrisen $(\tilde{b}, \tilde{A}\tilde{b}, \tilde{A}^2\tilde{b}, \tilde{A}^3\tilde{b})$ är en övertriangulär matris med diagonalelementen 1. Så Den är inverterbar. (ii) Vi använder oss av definitionen för inversen till M: $M^{-1}M = I_4$. Då $M^{-1}\tilde{b}$ är lika med den första kolonnen i I_4, dvs, $M^{-1}b = (1, 0, 0, 0)^T$. På samma sätt har vi

$$M^{-1}\tilde{A}M = M^{-1}(\tilde{A}\tilde{b}, \tilde{A}^2\tilde{b}, \tilde{A}^3\tilde{b}, \tilde{A}^4\tilde{b}) = (\underbrace{M^{-1}\tilde{A}\tilde{b}, M^{-1}\tilde{A}^2\tilde{b}, M^{-1}\tilde{A}^3\tilde{b}}_{\text{kolonnner 2,3,4 i } I_4}, M^{-1}\tilde{A}^4\tilde{b}).$$

Låt nu $M^{-1}\tilde{A}^4\tilde{b} = (-a_0, -a_1, -a_2, -a_3)^T$. Vi får $M^{-1}\tilde{A}M$ på den önskade formen, kalla den B. Nu ska vi visa att a_0, a_1, a_2, a_3 beror bara på $\tilde{A}$. Detta följer av att det karakteristiska polynomet av matrisen B är lika med $s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$ och det karakteristiska polynomet av $\tilde{A}$ och det karakteristiska polynomet av matrisen B är lika (eftersom $\tilde{A}$ och B är similärar).

3. (i) (a) definierar inte inre produkt eftersom positivitet inte garanteras. (b) definierar en inre produkt eftersom alla axiom i definitionen är uppfyllda: Det är självklart att $\langle p, q \rangle = \langle q, p \rangle$ och $\langle \alpha p, q \rangle = \alpha \langle p, q \rangle$ där α är en skalär; för ett godtyckligt polynom $p(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2$,

$$\langle p, p \rangle = p(0)^2 + p(1)^2 + p(2)^2 = 0 \Rightarrow p(0) = p(1) = p(2) = 0$$

Vilket ger $p(t) = 0$. Så positivitet är uppfylld.

(ii) Vi får

$$\langle t+1, t^2+t \rangle = 1 \cdot 0 + (1+1) \cdot (1^2+1) + (2+1) \cdot (2^2+2) = 22$$

4. (i) För f, g i V gäller att $f(0 = f(1), g(0) = g(1)$. Partiell integration ger

$$\langle Df, g \rangle = \int_0^1 f'(t)g(t)dt = f(1)g(1) - f(0)g(0) - \int_0^1 f(t)g'(t)dt$$
$$= -\int_0^1 f(t)g'(t)dt = -\langle f, Dg \rangle = \langle f, -Dg \rangle.$$

Således är $D^* = -D$.

(ii) Eftersom $D^*D = -D^2 = DD^*$ är D en normal operator. Men D är inte själv adjungerad.

5. (i) Låt λ vara ett egenvärde till A och x den tillhörande egenvektor som uppfyller $x_i = 1$ och $|x_j| \leq 1$ för $j \neq i$. Då ger $Ax = \lambda x$

$$\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j + a_{ii} = \lambda \quad \Rightarrow \quad |\lambda - a_{ii}| = \left|\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}x_j| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|.$$

Så $\lambda \in \cup_i K_i$.

(ii) & (iii) Direkt räkning ger att $p(s)$ är det karakteristiska polynomet till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Enligt (i) ligger egenvärden till matrisen A ovan (således nollställen till p)

$$\{z : |z| \leq 1\} \cup \{z : |z-2| \leq 11\} = \{z : |z-2| \leq 11\}.$$

Eftersom egenvärden till A^T är samma som egenvärden till A gäller även uppskattning med cirkelskivor i (i) för egenvärden till A^T. Då har vi en liten annorlunda union av cirkelskivor:

$$\{z : |z| \leq 8\} \cup \{z : |z| \leq 1\} \cup \{z : |z| \leq 3\} \cup \{z : |z-2| \leq 1\} = \{z : |z| \leq 8\} \subset \{z : |z-2| \leq 11\}.$$

Det sista verkar ge bättre uppskattning.

6. (i) (a) Genom att i tur och ordning utnyttja räknereglerna 3, 4, 2, 5, 7, 5, 4 för definition av vektorrum (se boken) får vi

$$\begin{aligned} 0v &= 0v + \mathbf{0} = 0v + (v - v) = (0v + v) - v = (0v + 1v) - v \\ &= (0+1)v - v = 1v - v = v - v = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

(b) På grund av (a) är $0\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Med hjälp av 6 får vi därför

$$\alpha\mathbf{0} = \alpha(0\mathbf{0}) = (\alpha 0)\mathbf{0} = 0\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

(ii) Genom att i tur och ordning utnyttja 3, 4, 2, 5, 7, och (i-a), (i-a)), 5, 7, och 5 får vi

$$\begin{aligned} (-1)v &= (-1)v + \mathbf{0} = (-1)v + (v - v) = ((-1)v + v) - v \\ &= ((-1)v + 1v) - v = (-1+1)v - v = 0v - v \\ &= \mathbf{0} - v = 0(-v) + 1(-v) = (0+1)(-v) = 1(-v) = -v. \end{aligned}$$