MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Sven Raum

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
November 30, 2021

15 poäng ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas.

1. (a) **(2 poäng)** Låt V vara ett vektorrum och $v_1, \dots, v_n \in V$ vektorer. Definiera när de kallas
   - linjär oberoende, och
   - en ordnad bas av V.

   (b) **(3 poäng)** Låt $\mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{C})$ vara vektorrum av alla komplexa matriser av storlex 2×3 och låt $T : \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^2$ vara avbildningen

$$T(A) = \begin{pmatrix} A_{11} + iA_{21} \\ (1\ 1)A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

   Bestäm $\mathrm{N}(T)$ och $\mathrm{R}(T)$ och hitta en bas till $\mathrm{N}(T)$.

2. (a) **(1 poäng)** Låt $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Definiera när A kallas normal.

   (b) **(3 poäng)** Låt

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 6 & -4 & -3 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Betrakta A som en reell matris och bestäm om A är diagonaliserbar. Om så är fallet, bestäm en bas för $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer av A för $\mathbb{R}^3$ samt deras egenvärden.

   (c) **(1 poäng)** Betrakta nu matrisen A från sista delen som en komplex matris och bestäm om den är diagonaliserbar relativt till en ortonormalbas av $\mathbb{C}^3$.

3. (a) **(1 poäng)** Definiera begreppet ”ortogonalt komplement”.

   (b) **(4 poäng)** Låt

$$t_0 = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = 2,\ t_3 = 3$$
$$y_0 = 0,\ y_1 = 0,\ y_2 = 1,\ y_3 = 2\,.$$

   Finn koefficienter $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ sådan att den linjära funktionen

$$f(t) = c_0 + c_1 t$$

   minimerar kvadratiska avståndet

$$|f(t_0) - y_0|^2 + |f(t_1) - y_1|^2 + |f(t_2) - y_2|^2 + |f(t_3) - y_3|^2\,.$$

4. (a) **(1 poäng)** Definiera begreppet ”ortogonal matris”.

   (b) **(1 poäng)** Definiera begreppet ”ortonormal bas”.

(c) **(3 poäng)** Beräkna QR-uppdelningen av

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})\,.$$

5. (a) **(1 poäng)** Definiera begreppet "kvadratisk form".
   (b) **(4 poäng)** Beräkna rang och signaturen av kvadratiska formen

$$K : \mathrm{P}_4(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$K(p) = p^2(1)\,.$$

6. (a) **(2 poäng)** Låt $T : V \to W$ vara en bijektiv linjär avbilding. Bevisa att inversa avbildningen T^{-1} är linjär.
   (b) **(3 poäng)** Låt $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{F})$ vara en 2×2-matris med elementer i ett godtycklig kropp $\mathbb{F}$. Bevisa att A är inverterbar om och endast om $\det A \neq 0$.

Skrivningsåterlämning äger rum fredagen 10 december kl. 12:00 utanför sal 15, hus 5. Därefter kan skrivningen hämtas från studentexpeditionen.