MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Sven Raum

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
November 30, 2021

15 poäng ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas.

1. (a) **(2 poäng)** Låt V vara ett vektorrum och $v_1, \ldots, v_n \in V$ vektorer. Definiera när de kallas
   - linjär oberoende, och
   - en ordnad bas av V.

   (b) **(3 poäng)** Låt $\mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{C})$ vara vektorrum av alla komplexa matriser av storlex 2×3 och låt $T : \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^2$ vara avbildningen

$$T(A) = \begin{pmatrix} A_{11} + iA_{21} \\ (1\ 1)A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Bestäm $\mathrm{N}(T)$ och $\mathrm{R}(T)$ och hitta en bas till $\mathrm{N}(T)$.

Lösning.

(a) Vektorerna $v_1, \ldots, v_n$ kallas linjär oberoende om nollvektorn representeras bara av deras triviala linjär kombinationen. Med andra ord krävs att för alla skalär $c_1, \ldots, c_n$ ekvationen $c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0$ implicera att $c_1 = \cdots = c_n = 0$. Vektorerna $v_1, \ldots, v_n$ kallas för en ordnat bas av V om dem är linjär oberoende och genererande för V.

(b) För att jobba med avbildningen T förenklar vi först dess definierande uttryck och hittar

$$T(A) = \begin{pmatrix} A_{11} + iA_{21} \\ (1\ 1)A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} + iA_{21} \\ A_{11} + A_{21} + A_{12} + A_{22} + A_{13} + A_{23} \end{pmatrix} .$$

Vi ser nu direkt att

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = T(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = T(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) \in \mathrm{R}(T) .$$

Då $\mathrm{R}(T)$ är ett delrum av $\mathbb{C}^2$ kan vi dra slutsatsen att $\mathrm{R}(T) = \mathbb{C}^2$. Vi ska nu beräkna en bas för $\mathrm{N}(T)$. Då

$$6 = \dim \mathbb{C}^6 = \dim \mathrm{R}(T) + \dim \mathrm{N}(T) = 2 + \dim \mathrm{N}(T)$$

enligt dimensionsformeln, är det tillräklig att finna fyra linjär oberoende vektorer i $\mathrm{N}(T)$. Följande element uppfyller denna krav.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ i & -i & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

2. (a) **(1 poäng)** Låt $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Definiera när A kallas normal.

   (b) **(3 poäng)** Låt

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 6 & -4 & -3 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Betrakta A som en reell matris och bestäm om A är diagonaliserbar. Om så är fallet, bestäm en bas för $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer av A för $\mathbb{R}^3$ samt deras egenvärden.

   (c) **(1 poäng)** Betrakta nu matrisen A från sista delen som en komplex matris och bestäm om den är diagonaliserbar relativt till en ortonormalbas av $\mathbb{C}^3$.

Lösning.

(a) Matrisen $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ kallas normal om $A^*A = AA^*$ gäller.

(b) Vi börjar med att beräkna karaktäristiska polynomet av A.

$$\begin{aligned}
\chi_A(t) &= \det(A - t1_3) \\
&= \det \begin{pmatrix} 3-t & -1 & -1 \\ 6 & -4-t & -3 \\ -4 & 4 & 3-t \end{pmatrix} \\
&= (3-t)\det\begin{pmatrix} -4-t & -3 \\ 4 & 3-t \end{pmatrix} - (-1)\det\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 3-t \end{pmatrix} + (-1)\det\begin{pmatrix} 6 & -4-t \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \\
&= (3-t)((-4-t)(3-t)+12) + (6(3-t)-12) - (24+4(-4-t)) \\
&= (3-t)(-4-t)(3-t) + 36 - 12t + 18 - 6t - 12 - 24 + 16 + 4t \\
&= (3-t)(-4-t)(3-t) - 14t + 34\,.
\end{aligned}$$

Vi behöver inte förenkla polynomet vidare, utan observera att dess konstanta koefficienten är $3(-4)3 + 34 = -2$. Vi ska alltså pröva kandidatrötter $1, -1, 2, -2$.

För 1 får vi

$$\chi_A(1) = 2(-5)2 - 14 + 34 = 0\,.$$

För -1 får vi

$$\chi_A(-1) = 4(-3)4 + 14 + 34 = 0\,.$$

För 1 får vi

$$\chi_A(2) = 1(-6)1 - 28 + 34 = 0\,.$$

Samanfattningsvis är $1, -1, 2$ röterna av $\chi_A(t)$, då dess grad är tre.

Man kan nu beräkna egenvektorer till egenvärde $1, -1, 2$ och hitta

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) A är inte normal, alltså är den inte diagonaliserbar relativt till en ortonormalbas av $\mathbb{C}^3$

3. (a) **(1 poäng)** Definiera begreppet ”ortogonalt komplement”.

   (b) **(4 poäng)** Låt

$$t_0 = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = 2,\ t_3 = 3$$
$$y_0 = 0,\ y_1 = 0,\ y_2 = 1,\ y_3 = 2\,.$$

Finn koefficienter $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ sådan att den linjära funktionen

$$f(t) = c_0 + c_1 t$$

minimerar kvadratiska avståndet

$$|f(t_0) - y_0|^2 + |f(t_1) - y_1|^2 + |f(t_2) - y_2|^2 + |f(t_3) - y_3|^2\,.$$

Lösning.

(a) Om $S \subseteq V$ är en delmäng av ett inre produktrum, så är dess ortogonalt komplement

$$S^{\perp} = \{v \in V \mid \langle s, v\rangle = 0 \text{ för alla } s \in S\}\,.$$

(b) Vi definera

$$A = \begin{pmatrix} t_1 & 1 \\ t_2 & 1 \\ t_3 & 1 \\ t_4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Då ska varje vektor $c = (c_1, c_0)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^2$ som minimerar avståndet

$$\|Ac - y\|$$

vara en lösning till problemet. Sådana vektorer hittas genom att lösa ekvationssystemet

$$A^* A c = A^* y\,.$$

Vi beräkna alla termer som finns i denna ekvation, och finnar

$$A^* A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix},$$

samt

$$A^* y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Vi tillämper alltså Gauss elimination på

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 14 & 6 & 5 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & \frac{10}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{10} \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Samanfattningsvis är

$$c_1 = \frac{7}{10} \quad \text{och} \quad c_0 = -\frac{3}{10}$$

lösningen till problemet.

4. (a) **(1 poäng)** Definiera begreppet ”ortogonal matris”.
   (b) **(1 poäng)** Definiera begreppet ”ortonormal bas”.
   (c) **(3 poäng)** Beräkna QR-uppdelningen av

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})\,.$$

Lösning

Matrisen A i denna uppgift hadde en skrivfel i elementet A_{12}, vilket gjorde beräkningar betydlig svårare. På grund av detta fel rättades uppgift 4.c på sådan sätt att förståelse av metoden ger redan 2 av 3 poäng. Dessutom sänktes gränserna för att uppnå alla betyg (A/B/C/D/E) med 2 poäng.

Korrekta matrisen för denna uppgiften var

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\,.$$

(a) En matris $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ kallas för ortogonal om $A^{\mathrm{t}}A = I_n$. (Det är också accepterad att definera begreppet bara för reella matriser).

(b) En familj $v_1, \ldots, v_n \in V$ av vektorer i ett inre produktrum kallas för ortonormal bas om följande villkor uppfylls.

- $v_1, \ldots, v_n$ genererar V,
- $v_1, \ldots, v_n$ är parvis ortogonal, och
- $\|v_i\| = 1$ för varje $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(c) Genom att tillämpa Gram-Schmidts metod på samma sätt som i tentan från 26:de oktober 2021 hitta man att

$$A = QR \text{ med } \quad Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

5. (a) **(1 poäng)** Definiera begreppet "kvadratisk form".

   (b) **(4 poäng)** Beräkna rang och signaturen av kvadratiska formen

$$K : \mathrm{P}_4(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$K(p) = p^2(1)\,.$$

Lösning

(a) Om V är ett $\mathbb{F}$-vektorrum, så kallas en avbilding $K : V \to \mathbb{F}$ för kvadratisk form om det finns en symmetrisk bilinjärform $B : V \times V \to \mathbb{F}$ sådan att $K(v) = B(v, v)$ för alla $v \in V$.

(b) Vi måste först hitta symmetriska bilinjärformen som representerar K. Observer att

$$B(p, q) = (p \cdot q)(1)$$

definierar en bilinjärform på $\mathrm{P}_4(\mathbb{R})$ som är tydlig symmetrisk. Dessutom gäller $K(p) = p^2(1) = B(p, p)$ för all $p \in \mathrm{P}_4(\mathbb{R})$. Nu hittar vi en matris som representerar B. Därför använder vi standard basen $1, t, t^2, t^3, t^4$ av $\mathrm{P}_4(\mathbb{R})$. Om vi kalla denna vektorer för $v_1, v_2, \ldots, v_5$, så uppfyller matrisen $A \in \mathrm{M}_5(\mathbb{R})$ som söks kravet att $A_{ij} = B(v_i, v_j)$ för all $i, j \in \{1, \ldots, 5\}$. Vi hittar matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rang av K är rangen av A och signaturen av K är differensen mellan antal positiva och antal negativer egenvärde av A. Då colonrumet av A är endimensionell är dess rang 1. Dessutom vet vi att det finns bara en icke-nol egenvärde, som är 5 (med egenvektor $(1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{t}}$). Alltså är signaturen av K lika med 1.

6. (a) **(2 poäng)** Låt $T : V \to W$ vara en bijektiv linjär avbilding. Bevisa att inversa avbildningen T^{-1} är linjär.

   (b) **(3 poäng)** Låt $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{F})$ vara en 2×2-matris med elementer i ett godtycklig kropp $\mathbb{F}$. Bevisa att A är inverterbar om och endast om $\det A \neq 0$.

Lösning. Ser bok eller föreläsningsanteckningar.