MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Sven Raum

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
Augusti 18, 2022

15 poäng ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas.

1. (a) **(1 poäng)** Definera begreppen ”nollrum” och ”bildrum” av en linjär avbildning.
   (b) **(1 poäng)** Låt $T : V \to W$ vara en linjär avbildning. Visa att nollrummet $\mathrm{N}(T)$ är ett delrum av V.
   (c) **(3 poäng)** Låt $T : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vara den linjära avbildningen som uppfyller
   $$T(A) = \left(A + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$
   Visa att T är linjär, bestäm $\mathrm{R}(T)$ och hitta en bas till $\mathrm{N}(T)$.

2. (a) **(1 poäng)** Definiera begreppet ”egenvektor av en linjär avbildning”.
   (b) **(4 poäng)** Betrakta den linjära avbildningen $\mathrm{T} : \mathrm{P}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{P}_2(\mathbb{C})$ som uppfyller $\mathrm{T}(p) = (x + i)p'$. Hitta en bas av egenvektorer av T till $\mathrm{P}_2(\mathbb{C})$.

3. (a) **(1 poäng)** Definiera begreppen ”ortogonal bas” och ”ortonormal bas” av ett inre-produktrum.
   (b) **(4 poäng)** Betrakta $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ med inre produkten
   $$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(AB^{\mathrm{t}}) = (AB^{\mathrm{t}})_{11} + (AB^{\mathrm{t}})_{22} ,$$
   där B^{t} är transponatet av matrisen B. För $\alpha \in \mathbb{R}$ definiera den linjära avbildningen $T_\alpha : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ genom formeln
   $$T_\alpha(A) = \alpha A + (1 - \alpha)A^{\mathrm{t}} .$$
   Bestäm för vilka $\alpha \in \mathbb{R}$ är avbildingen T_α diagonaliserbar relativ till en ortonormal bas av $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Man får använda utan bevis att $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ och $\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{t}}) = \mathrm{Tr}(A)$ gäller för alla matriser $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

4. (a) **(1 poäng)** Definiera begreppet ”QR-uppdelning av en komplex matris”.
   (b) **(4 poäng)** Beräkna en QR-uppdelning för matrisen
   $$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & \sqrt{2} - 2 \\ 1 & 1 & -2 & \sqrt{2} + 2 \end{pmatrix} .$$

5. (a) **(1 poäng)** Definiera begreppet ”symmetrisk bilinjär form”.
   (b) **(4 poäng)** Beräkna rang och signaturen av den bilinjära form $K : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ som uppfyller
   $$K(v) = v_1 v_3 - v_2 v_4 .$$

6. (a) **(2 poäng)** Låt $T : V \to W$ vara en bijektiv linjär avbilding och låt $T^{-1} : W \to V$ vara inversen, som uppfyller $T^{-1}(T(v)) = v$ för alla $v \in V$. Bevisa att T^{-1} är linjär.
   (b) **(3 poäng)** Låt $U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ vara en komplex matris. Bevisa att U är unitär om och endast om kolonnerna av U utgör en ortonormal bas till $\mathbb{C}^n$.

Rättningen av tentan kommer att vara färdig ungefär 2 veckor efter tentanskrivning. Därefter kan en elektronisk kopia av tentan beställas från studentexpeditionen genom länken https://survey.su.se/Survey/42570/sv.