MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
25 april 2023

15p ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas.

Påminnelse. Kom ihåg att om $\mathbb{F}$ är en kropp så skriver vi

- $\mathrm{P}_n(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av polynom av grad högst n med koefficienter i $\mathbb{F}$ och
- $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av $m \times n$-matriser med element i $\mathbb{F}$.

Uppgifter.

1. (a) **(1p)** Låt $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vara vektorer i ett vektorrum V över en kropp $\mathbb{F}$. Ange definitionen av att $v_1, v_2, \ldots, v_n$ är *linjärt oberoende*.

   (b) **(2p)** Låt W också vara ett vektorrum. Visa att om en linjär avbildning $T : V \to W$ är injektiv och $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ är linjärt oberoende, då är även $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ linjärt oberoende.

   (c) **(2p)** Låt $V = \mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ och låt

   $$v_1 = x^2 + x + 1, \qquad v_2 = x^2 - 1, \qquad v_3 = x^2 - x + 1$$

   vara tre element i V. Bestäm om vektorerna v_1, v_2, v_3 är linjärt oberoende eller inte (och kom ihåg att motivera noggrant).

2. (a) **(2p)** Låt $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ vara en matris. Ange definitionerna av begreppen *egenvärde* och *egenrum* för A, samt vad det betyder för A att vara *diagonaliserbar*.

   (b) **(3p)** Låt

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

   Beräkna samtliga egenvärden för A och baser för de tillhörande egenrummen, samt avgör om A är diagonaliserbar.

3. Betrakta polynomrummet $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ med inre produkten

   $$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx \qquad (\text{för } f, g \in \mathrm{P}_2(\mathbb{R})).$$

   (a) **(2p)** Bestäm samtliga polynom av grad som högst 1 som är ortogonala mot $p(x) = 12x - 6$.

   (b) **(3p)** Bestäm en ON-bas för delrummet U till $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ som spänns upp av $\{x^2,\ 12x - 6\}$.

4. (a) **(1p)** Låt V vara ett inre produktrum över $\mathbb{C}$. Formulera den komplexa spektralsatsen för V (som ger ett kriterium för att en linjär operator på V är diagonaliserbar relativt en ON-bas för V).

   (b) **(4p)** Låt $U \subseteq \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ vara delrummet

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{med inre produkten } \left\langle \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & a_2 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1\overline{a_2} + b_1\overline{b_2} + c_1\overline{c_2}.$$

En linjär operator $T : U \to U$ definieras via

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+c \\ 4b+c & a \end{pmatrix}.$$

Avgör om T är diagonaliserbar relativt en ON-bas för U.

Ledning: Det är tillåtet att utan bevis använda att följande är en ON-bas för U:

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

5. (a) **(1p)** Låt $T : V \to W$ vara en linjär avbildning mellan ändligtdimensionella inre produktrum V och W. Ange en definition av T:s *nollskilda singulärvärden.* Obs: vilken som helst av de olika ekvivalenta definitionerna går bra.

   (b) **(4p)** Beräkna en singulärvärdesuppdelning av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

6. (a) **(2p)** Låt $A \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ vara en matris. Ange definitionen för att A är *unitär*, och visa att om A har kolonner u_1, u_2, u_3 som utgör en ON-bas för $\mathbb{C}^3$ så är A unitär.

   (b) **(2p)** Låt $T : V \to W$ vara en linjär avbildning mellan vektorrum V och W med $\dim V = \dim W < \infty$. Visa att T är injektiv om och endast om T är surjektiv.

   (c) **(1p)** Definiera $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ via $T(x, y, z) = (x + 2y + z,\ x + y + z,\ x - z)$. Avgör om T är surjektiv eller inte.

Rättningen av tentan kommer att vara färdig ungefär 2 veckor efter tentamensskrivning. Därefter kan en elektronisk kopia av tentan beställas från studentexpeditionen genom länken `https://survey.su.se/Survey/48245/sv`.