MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
25 april 2023

Lösningsförslag

1. (a) **(1p)** Låt $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vara vektorer i ett vektorrum V över en kropp $\mathbb{F}$. Ange definitionen av att $v_1, v_2, \ldots, v_n$ är *linjärt oberoende.*

   (b) **(2p)** Låt W också vara ett vektorrum. Visa att om en linjär avbildning $T : V \to W$ är injektiv och $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ är linjärt oberoende, då är även $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ linjärt oberoende.

   (c) **(2p)** Låt $V = \mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ och låt

$$v_1 = x^2 + x + 1, \qquad v_2 = x^2 - 1, \qquad v_3 = x^2 - x + 1$$

   vara tre element i V. Bestäm om vektorerna v_1, v_2, v_3 är linjärt oberoende eller inte (och kom ihåg att motivera noggrant).

Lösning

(a) Vektorerna $v_1, \ldots, v_n$ kallas linjärt oberoende om de enda skalärerna $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ som uppfyller $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0_V$ är $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

(b) Vi behöver visa att om $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ är skalärer och

$$a_1 T(v_1) + \cdots + a_n T(v_n) = 0_W, \quad \text{då är} \quad a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

Anta att $a_1 T(v_1) + \cdots + a_n T(v_n) = 0_W$. Eftersom T är linjär så innebär detta att

$$T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = 0_W = T(0_V).$$

Eftersom T är injektiv så innebär detta att

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0_V,$$

och eftersom $v_1, \ldots, v_n$ är linjärt oberoende så medför detta att $a_1 = \cdots = a_n = 0$, vilket var det vi ville visa.

(c) Frågan är alltså om det finns skalärer a_1, a_2, a_3, inte alla 0, sådana att

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0_V,$$

dvs

$$a_1(x^2 + x + 1) + a_2(x^2 - 1) + a_3(x^2 - x + 1) = 0_V.$$

Vi undersöker detta genom att samla termer:

$$(a_1 + a_2 + a_3)x^2 + (a_1 - a_3)x + (a_1 - a_2 + a_3) = 0_V.$$

Detta gäller om och endast om

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ a_1 - a_3 &= 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 &= 0. \end{aligned}$$

Genom att jämföra den första och den tredje ekvationen ser vi att systemet medför att $a_2 = 0$. Utifrån den första och den andra ekvationen ser vi sedan att $a_1 = a_3 = 0$ också. Alltså är $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ den enda lösningen till $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0_V$, dvs vektorerna är linjärt oberoende.

Svar: Vektorerna är linjärt oberoende.

2. (a) **(2p)** Låt $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ vara en matris. Ange definitionerna av begreppen *egenvärde* och *egenrum* för A, samt vad det betyder för A att vara *diagonaliserbar.*

   (b) **(3p)** Låt
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$
Beräkna samtliga egenvärden för A och baser för de tillhörande egenrummen, samt avgör om A är diagonaliserbar.

Lösning

(a) En skalär $\lambda \in \mathbb{F}$ kallas ett egenvärde för A om det finns en nollskild vektor $v \in \mathbb{F}^n$ sådan att $Av = \lambda v$. Egenrummet motsvarande ett egenvärde λ är delrummet
$$E_\lambda = \{v \in \mathbb{F}^n : Av = \lambda v\}.$$
Matrisen A kallas diagonaliserbar om det finns en bas för $\mathbb{F}^n$ bestående av egenvektorer för T. Ekvivalent: om det finns en bas B för $\mathbb{F}^n$ sådan att matrisen $[L_A]_B^B$ är en diagonalmatris, där $L_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ är den linjära avbildningen som ges av $L_A(x) = Ax$.

(b) Eftersom A är övertriangulär vet vi enligt utlärd sats att dess egenvärden är precis matrisens diagonalelement, dvs 2 (med algebraisk multiplicitet två) och -4. Vi beräknar nu de motsvarande egenrummen:

$\mathbf{E_2}$: Egenrummet till egenvärdet 2 är precis nollrummet till matrisen
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Nollrummet till denna matris har t.ex. $(1, 0, 0)$ och $(0, 1, 0)$ som bas, så
$$E_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$
$\mathbf{E_{-4}}$: Egenrummet till egenvärdet -4 är precis nollrummet till matrisen
$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Alla vektorer (x_1, x_2, x_3) i detta nollrum har $x_2 = 0$ och $x_1 + x_3 = 0$; alltså är
$$E_{-4} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$
De tre vektorerna vi har identifierat är uppenbarligen linjärt oberoende, och utgör därmed en bas för $\mathbb{R}^3$. Alltså är A diagonaliserbar.

Svar: Egenrummet för egenvärdet 2 har bas $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$, och egenrummet för egenvärdet -4 har bas $\{(1, 0, -1)\}$. A är diagonaliserbar.

3. Betrakta polynomrummet $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ med inre produkten

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx \qquad (\text{för } f, g \in \mathrm{P}_2(\mathbb{R})).$$

(a) **(2p)** Bestäm samtliga polynom av grad som högst 1 som är ortogonala mot $p(x) = 12x - 6$.

(b) **(3p)** Bestäm en ON-bas för delrummet U till $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ som spänns upp av $\{x^2,\ 12x - 6\}$.

Lösning

(a) Vi kan representera ett godtyckligt polynom av grad som högst 1 på formen $q(x) = ax + b$. Polynomen q och p är ortogonala om och endast om $\langle p, q\rangle = 0$, dvs

$$\int_0^1 (ax + b)(12x - 6)\,dx = 0.$$

Vi förenklar integralen:

$$\int_0^1 12ax^2 + (12b - 6a)x - 6b\,dx = \left[4ax^3 + (6b - 3a)x^2 - 6bx\right]_0^1 = 4a + (6b - 3a) - 6b = a.$$

Alltså är $q(x) = ax + b$ ortogonal mot p om och endast om $a = 0$, dvs omm $q(x)$ är konstant.

Svar: Det är precis de konstanta polynomen $q(x) = b$ som är ortogonala mot p.

(b) Vi använder Gram–Schmidts metod för detta. Först låter vi

$$u_1 = x^2$$

och noterar att

$$\|u_1\|^2 = \langle x^2, x^2\rangle = \int_0^1 x^4\,dx = \tfrac{1}{5}.$$

Vi tar sedan nästa vektor u_2 som

$$u_2 = (12x - 6) - \frac{\langle 12x - 6,\ u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = (12x - 6) - \langle 12x - 6,\ x^2\rangle \cdot 5x^2.$$

Vi beräknar:

$$\langle 12x - 6,\ x^2\rangle = \int_0^1 (12x - 6)x^2\,dx = \int_0^1 12x^3 - 6x^2\,dx = \left[3x^4 - 2x^3\right]_0^1 = 1.$$

Alltså är

$$u_2 = 12x - 6 - 5x^2.$$

Vektorerna u_1, u_2 utför en ortogonal bas för U; för att få en ON-bas normerar vi. Vi vet redan att $\|u_1\| = 1/\sqrt{5}$, och vi beräknar

$$\begin{aligned}\|u_2\|^2 &= \int_0^1 (12x - 6 - 5x^2)^2\,dx = \int_0^1 25x^4 - 120x^3 + 204x^2 - 144x + 36\,dx \\ &= \left[5x^5 - 30x^4 + 68x^3 - 72x^2 + 36x\right]_0^1 \\ &= 7.\end{aligned}$$

De normerade vektorerna $\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}$, dvs $\sqrt{5}x^2, (12x - 6 - 5x^2)/\sqrt{7}$, utgör då en ON-bas för U.

Svar: En bas för U ges av $\{\sqrt{5}x^2,\ \frac{1}{\sqrt{7}}(12x - 6 - 5x^2)\}$.

4. (a) **(1p)** Låt V vara ett inre produktrum över $\mathbb{C}$. Formulera den komplexa spektralsatsen för V (som ger ett kriterium för att en linjär operator på V är diagonaliserbar relativt en ON-bas för V).

   (b) **(4p)** Låt $U \subseteq \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ vara delrummet

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{med inre produkten} \left\langle \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & a_2 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1\overline{a_2} + b_1\overline{b_2} + c_1\overline{c_2}.$$

   En linjär operator $T : U \to U$ definieras via

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+c \\ 4b+c & a \end{pmatrix}.$$

   Avgör om T är diagonaliserbar relativt en ON-bas för U.

   Ledning: Det är tillåtet att utan bevis använda att följande är en ON-bas för U:

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Lösning

(a) Den komplexa spektralsatsen säger att linjär operator T på V är diagonaliserbar relativt en ON-bas för V om och endast om T är *normal*, dvs omm T och T^* kommuterar, där T^* är T:s adjungerade avbildning.

(b) Enligt den komplexa spektralsatsen är T diagonaliserbar relativt en ON-bas för U om och endast om T är normal, dvs $T \circ T^* = T^* \circ T$. Enligt utlärd sats gäller detta om och endast om T:s matris A relativt en ON-bas för U är normal, dvs uppfyller $A\,A^* = A^*A$. Vi beräknar därför en sådan matris A och kollar detta.

Vi tar ON-basen $B = (v_1, v_2, v_3)$ för U givet i ledningen, och beräknar:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = v_1 \\ T(v_2) &= T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = v_2 + 4v_3 \\ T(v_3) &= T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = v_2 + v_3. \end{aligned}$$

Alltså är

$$A = [T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nu kontrollerar vi huruvida A är normal:

$$A\,A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 17 \end{pmatrix}$$

och

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 17 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

Eftersom dessa matriser inte är lika, så är A inte normal, och eftersom A är matrisen för T relativt en ON-bas så är T heller inte normal.

Svar: Operatorn T är inte diagonaliserbar relativt en ON-bas för U.

5. (a) **(1p)** Låt $T : V \to W$ vara en linjär avbildning mellan ändligtdimensionella inre produktrum V och W. Ange en definition av T:s *nollskilda singulärvärden*. Obs: vilken som helst av de olika ekvivalenta definitionerna går bra.

   (b) **(4p)** Beräkna en singulärvärdesuppdelning av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Lösning

(a) Enligt singulärvärdessatsen finns det ON-baser $(v_1, \ldots, v_n)$ och $(w_1, \ldots, w_m)$ för V respektive W, och unika reella tal $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$, där $r = \mathrm{rang}(T)$, sådana att $T(v_i) = \sigma_i w_i$ för $i = 1, \ldots, r$ och $T(v_j) = 0$ för $j > r$. Talen $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ kallas för T:s nollskilda singulärvärden.

(b) Vi söker, per definition, en faktorisering $A = U\,\Sigma\,V^*$ där U och V är ortogonala matriser och

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix},$$

där $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$ är A:s singulärvärden.

Vi vet att de nollskilda singulärvärdena för A precis motsvarar kvadratrötterna ur de nollskilda egenvärdena till A^*A, så vi beräknar denna matris.

Vi har att

$$A^*A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

För att hitta egenvärdena beräknar vi det karateristiska polynomet

$$\det(A^*A - t \cdot I) = (12-t)\big((6-t)^2 - 3^2\big) = (12-t)(9-t)(3-t).$$

Alltså är egenvärdena 3, 9 och 12, och därmed är singulärvärdena $\sigma_1 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $\sigma_2 = 3$ och $\sigma_3 = \sqrt{3}$. Alltså ges matrisen Σ av

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

För att hitta matrisen V beräknar vi egenvektorer för A^*A motsvarande egenvärdena.

För egenvärdet 12 subtraherar vi 12 från diagonalelementen och räknar ut nollrummet till matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nollrummet, och därmed egenrummet E_{12}, spänns alltså upp av enhetsvektorn

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

För egenvärdet 9 räknar vi liknande:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Här spänns egenrummet E_9 upp av vektorn $(0, 1, 1)$, som vi normerar till

$$v_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

För egenvärdet 3 räknar vi liknande:

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Här spänns egenrummet E_3 upp av vektorn $(0, 1, -1)$, som vi normerar till

$$v_3 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dessa tre vektorer utgör kolonnerna av den eftersökta matrisen V, dvs

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Det sista steget är att hitta en matris U som uppfyller villkoren, vilket vi gör genom att bestämma dess kolonner u_1, u_2, u_3. För detta använder vi att $Av_i = \sigma_i u_i$ för $i = 1, 2$, dvs att $u_i = \frac{1}{\sigma_i} Av_i$:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \tfrac{1}{2\sqrt{3}} Av_1 = \tfrac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
u_2 &= \tfrac{1}{3} Av_1 = \tfrac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
u_3 &= \tfrac{1}{\sqrt{3}} Av_1 = \tfrac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dessa tre vektorer utgör kolonnerna av den ortogonala matrisen U:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Alltså har vi:

Svar: En singulärvärdesuppdelning ges av $A = U\,\Sigma\,V^*$, där

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

6. (a) **(2p)** Låt $A \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ vara en matris. Ange definitionen för att A är *unitär*, och visa att om A har kolonner u_1, u_2, u_3 som utgör en ON-bas för $\mathbb{C}^3$ så är A unitär.

   (b) **(2p)** Låt $T : V \to W$ vara en linjär avbildning mellan vektorrum V och W med $\dim V = \dim W < \infty$. Visa att T är injektiv om och endast om T är surjektiv.

   (c) **(1p)** Definiera $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ via $T(x, y, z) = (x+2y+z,\ x+y+z,\ x-z)$. Avgör om T är surjektiv eller inte.

Lösning

(a) Matrisen A kallas unitär om $A^* A = A A^* = I$, dvs om $A^{-1} = A^*$. Om en matris A har kolonner u_1, u_2, u_3 som är en ON-bas för $\mathbb{C}^3$, då har vi per definition att $u_i \cdot \overline{u_j} = 0$ om $i \neq j$ och $u_i \cdot \overline{u_i} = 1$ för varje i. Alltså är

$$A^* A = \begin{pmatrix} — & \overline{u_1} & — \\ — & \overline{u_2} & — \\ — & \overline{u_3} & — \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \cdot \overline{u_1} & u_2 \cdot \overline{u_1} & u_3 \cdot \overline{u_1} \\ u_1 \cdot \overline{u_2} & u_2 \cdot \overline{u_2} & u_3 \cdot \overline{u_2} \\ u_1 \cdot \overline{u_3} & u_2 \cdot \overline{u_3} & u_3 \cdot \overline{u_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Därmed är $A^{-1} = A^*$, så A är unitär.

(b) Vi vet enligt utlärd sats att T är injektiv om och endast om $N(T) = \{0_V\}$, och att T är surjektiv om och endast om $R(T) = W$. Enligt dimensionssatsen har vi att, för alla linjära avbildningar T,

$$\dim N(T) + \dim R(T) = \dim V.$$

I vårt fall har vi $\dim V = \dim W$, så

$$\dim N(T) + \dim R(T) = \dim W.$$

Eftersom $R(T) \leq W$ så är $R(T) = W$ omm $\dim R(T) = \dim W$, vilket enligt ekvationen ovan är sant omm $\dim N(T) = 0$, vilket är sant omm $N(T) = \{0_V\}$. Alltså är T surjektiv omm den är injektiv.

(c) Avbildningen uppfyller kraven från (b), alltså räcker det att bestämma om T är injektiv eller inte. Om $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$, då ser vi från den tredje koordinaten att $x = z$. Alltså måste $2x + 2y = 0$ och $2x + y = 0$, och därmed måste $y = x = z = 0$. Alltså är T injektiv, och därmed surjektiv.

Svar: T är surjektiv.