MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask
Kursansvarig: Bashar Saleh

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
30 november 2023

15p ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas.

Påminnelse. Kom ihåg att om $\mathbb{F}$ är en kropp så skriver vi

- $P_n(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av polynom av grad högst n med koefficienter i $\mathbb{F}$.
- $M_n(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av $n \times n$-matriser med element i $\mathbb{F}$.

Uppgifter.

1. (a) **(1p)** Låt V och W vara två vektorrum över en kropp $\mathbb{F}$ och låt $T\colon V \to W$ vara en linjär avbildning. Definiera bildrummet för T.

   (b) **(4p)** Låt $T\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ vara den linjära avbildningen som ges av

   $$T(p(x)) = (2 + 2x)p(x) - x^2 p'(x) - 2p''(x).$$

   Bestäm en bas för bildrummet för T, samt en bas för nollrummet för T.

2. (a) **(0.5p)** Definiera vad det innebär för en matris att vara normal.

   (b) **(0.5p)** Definiera vad det innebär för en matris att vara självadjungerad.

   (c) **(4p)** Betrakta följande matriser

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \pi^5 & \sqrt{14} \\ \sqrt{14} & \log(54) \end{pmatrix}.$$

   (i) Vilka av matriserna ovan är diagonaliserbara när de betraktas som reella matriser?
   (ii) Vilka av matriserna ovan är ortogonalt diagonaliserbara när de betraktas som reella matriser?
   (ii) Vilka av matriserna ovan är ortogonalt diagonaliserbara när de betraktas som komplexa matriser?

3. (a) **(2p)** Antag att en linjär operator $T\colon V \to V$ på ett ändligdimensionellt vektorrum V är både diagonaliserbar och inverterbar. Visa att även T^{-1} är diagonaliserbar.

   (b) **(2p)** Låt $T\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ vara givet av $T(A) = 3A - 2A^t$. Bestäm egenvärdena för T och baser för egenrummen för varje egenvärde.

   (c) **(1p)** Bestäm egenvärdena för T^{-1}.

4. (a) **(1p)** Låt V vara ett inre produktrum. Hur definieras normen $\|v\|$ av ett element $v \in V$?
   (b) **(2p)** Betrakta inre produkten på $P_1(\mathbb{R})$ given av

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^2 p(x)q(x)dx.$$

   Bestäm en ON-bas för $P_1(\mathbb{R})$ relativt denna inre produkt.
   (c) **(2p)** Avgör om den linjära operatorn $T\colon P_1(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$, $T(p(x)) = xp'(x)$ är ortogonalt diagonaliserbar med avseende på inre produkten i (b)-delen.

5. (a) **(1p)** Hur många nollskilda singulära värden har en inverterbar 7×7-matris?
   (b) **(4p)** Beräkna en singulärvärdesuppdelning av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

6. För ett komplext tal $a \in \mathbb{C}$ låt $S(a)$ vara en delmängd till $M_2(\mathbb{C})$ given av

$$S(a) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid A^* = aA\}.$$

   (a) **(1p)** Visa att $S(a)$ är icke-tom för alla $a \in \mathbb{C}$.
   (b) **(2p)** För vilka $a \in \mathbb{C}$ gäller att $S(a)$ har oändligt många element?
   (c) **(2p)** För vilka $a \in \mathbb{C}$ gäller att $S(a)$ är ett delrum till $M_2(\mathbb{C})$?

Rättningen av tentan kommer att vara färdig ungefär 2 veckor efter tentamensskrivning. Därefter kan tentan hämtas ut från studentexpeditionen under öppettiderna: tisdagar 11:45-12:45.