MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
29 augusti 2024

Lösningsförslag.

1. (a) Att $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ är en ordnad bas betyder att $v_1, \dots, v_n$ är linjärt oberoende och att $\{v_1, \dots, v_n\}$ spänner upp V. Det vill säga, att den enda lösningen till

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$$

med $a_i \in \mathbb{F}$ är $a_1 = \cdots = a_n = 0$, och att det för varje $v \in V$ finns skalärer $a_i \in \mathbb{F}$ sådana att $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$.

(b) Vi behöver visa att vektorerna är linjärt oberoende, och att de spänner upp $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{Linjärt oberoende:}}$ Om $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ är skalärer sådana att

$$a_1(1,0,0) + a_2(1,1,0) + a_3(1,1,1) = (0,0,0),$$

då kan vi se att $a_3 = 0$ genom att titta på den sista koordinaten, och sedan att $a_2 = 0$ genom att titta på den andra koordinaten, och slutligen att $a_1 = 0$ genom att titta på den första.

$\boxed{\text{Spänner upp:}}$ Om $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ så vill vi visa att det finns skalärer $a_i \in \mathbb{R}$ sådana att

$$a_1(1,0,0) + a_2(1,1,0) + a_3(1,1,1) = (a,b,c).$$

Likt ovan kan vi se att detta är ekvivalent med att $a_3 = c$, och att $a_2 + a_3 = b$, och att $a_1 + a_2 + a_3 = a$, eller

$$\begin{aligned} a_3 &= c \\ a_2 &= b - c \\ a_1 &= a - b, \end{aligned}$$

vilket visar att sådana skalärer finns.

(c) Vi börjar med att uttrycka $(4, 2, 3)$ som en linjärkombination av de givna vektorerna; enligt uttrycken för a_1, a_2, a_3 ovan kan vi skriva

$$(4,2,3) = 2(1,0,0) - (1,1,0) + 3(1,1,1).$$

Eftersom T är linjär kan vi därmed skriva

$$T(4,2,3) = 2\,T(1,0,0) - T(1,1,0) + 3\,T(1,1,1) = 2(1,2) - (-1,1) + 3(0,1) = (3,6).$$

Angående om det finns andra v med $T(v) = T(4,2,3)$: ja, det finns det, då

$$T(v) = T(4,2,3) \iff T(v - (4,2,3)) = 0 \iff v - (4,2,3) \in N(T),$$

och dimensionssatsen ger att $\dim N(T) = \dim V - \dim R(T) = 3 - 2 = 1$. T.ex. har $v = (3,0,0)$ egenskapen att $T(v) = (3,6) = T(4,2,3)$.

Svar: $T(4,2,3) = (3,6)$ och ja: det finns sådana vektorer v.

2. (a) En vektor $v \in V$ kallas en egenvektor för T med egenvärde $\lambda \in F$ om $v \neq 0_V$ och $T(v) = \lambda\, v$.

(b) Multiplikation med A har effekten att byta plats på de första två koordinaterna, samt på de sista två koordinaterna. Därmed kan vi se att vektorerna

$$(1,1,0,0) \quad \text{och} \quad (0,0,1,1)$$

avbildas på sig själva, och dessa är därför egenvektorer med egenvärde 1. Liknande avbildas

$$(1,-1,0,0) \quad \text{och} \quad (0,0,1,-1)$$

på minus sig själva, och dessa är därmed egenvektorer med egenvärde -1. Eftersom dessa fyra vektorer är uppenbarligen linjärt oberoende, så har vi hittat fyra linjärt oberoende egenvektorer för A. Eftersom vi har hittat två 2-dimensionella egenrum (med egenvärden 1 resp. -1) i ett 4-dimensionellt vektorrum så har vi enligt kurssats hittat alla egenvärden.

Svar: $(1,1,0,0)$, $(0,0,1,1)$, $(1,-1,0,0)$ och $(0,0,1,-1)$, och egenvärden ± 1.

(c) Matrisen är diagonaliserbar, eftersom vi från kurssats vet att en $n \times n$-matris M över $\mathbb{F}$ är diagonaliserbar om och endast om det finns en bas för $\mathbb{F}^n$ bestående av egenvektorer för M. I vårt fall har vi 4 linjärt oberoende egenvektorer i det 4-dimensionella vektorrummet $\mathbb{R}^4$, så dessa är (enligt kurssats) automatiskt en bas.
Svar: Ja.

3. (a) Vi använder Gram–Schmidt algoritmen på basen (p_1, p_2) för V. Låt

$$u_1 = p_1 = 5x^2 - 3$$

och låt sedan

$$u_2 = p_2 - \frac{\langle p_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}\, u_1.$$

För att räkna ut detta beräknar vi:

$$\|u_1\|^2 = \int_0^1 (5x^2-3)^2\, dx = \int_0^1 25x^4 - 30x^2 + 9\, dx = [5x^5 - 10x^3 + 9x]_0^1 = 4,$$

och

$$\begin{aligned}\langle p_2, u_1\rangle &= \int_0^1 (5x^2+16x-6)(5x^2-3)\, dx = \int_0^1 25x^4 + 80x^3 - 45x^2 - 48x + 18\, dx \\ &= [5x^5 + 20x^4 - 15x^3 - 24x^2 + 18x]_0^1 \\ &= 4.\end{aligned}$$

Alltså är

$$u_2 = p_2 - \frac{4}{4}u_1 = (5x^2 + 16x - 6) - (5x^2 - 3) = 16x - 3.$$

Enligt satsen om Gram–Schmidt är u_1, u_2 ortogonala mot varandra samt spänner upp V, och är därmed en ortogonal bas för V.

Svar: Ortogonal bas $\{5x^2 - 3,\ 16x - 3\}$.

(b) Enligt kurssats är
$$\dim V + \dim V^\perp = \dim \mathrm{P}_2(\mathbb{R}) = 3,$$
så
$$\dim V^\perp = 3 - 2 = 1.$$
Vi kan förlänga basen u_1, u_2 från förra delen till en ortogonal bas u_1, u_2, u_3 för $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$, och enligt kurssats utgör då u_3 en bas för $V^\perp$. Vi använder Gram–Schmidt igen, med u_1, u_2 och $p_3 = 1$ som uppenbarligen är linjärt oberoende från u_1, u_2: vi låter
$$u_3 = p_3 - \frac{\langle p_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2}\, u_1 - \frac{\langle p_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2}\, u_2.$$
För att beräkna detta behöver vi veta
$$\|u_2\|^2 = \int_0^1 (16x-3)^2\,dx = \int_0^1 256x^2 - 96x + 9\,dx = \frac{256}{3} - 48 + 9 = \frac{139}{3},$$
$$\langle p_3, u_1 \rangle = \int_0^1 5x^2 - 3\,dx = -\frac{4}{3},$$
och
$$\langle p_3, u_2 \rangle = \int_0^1 16x - 3\,dx = 5.$$
Alltså är
$$\begin{aligned} u_3 &= 1 + \frac{4/3}{4}(5x^2-3) - \frac{5}{139/3}(16x-3) = 1 + \frac{1}{3}(5x^2-3) - \frac{15}{139}(16x-3) \\ &= \frac{5}{3}x^2 - \frac{240}{139}x + \frac{45}{139}. \end{aligned}$$

Svar: $\dim V^\perp = 1$ och vektorn $u_3 = \frac{5}{3}x^2 - \frac{240}{139}x + \frac{45}{139}$ utgör en bas för $V^\perp$.

4. (a) En sådan matris A kallas normal om $A^*A = A\,A^*$, där A^* är konjugat-transponatet av A.

(b) Enligt den komplexa spektralsatsen finns det en ON-bas för $\mathbb{C}^2$ bestående av egenvektorer för A om och endast om A är normal. För vår matris
$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}}(1+i) & 3+4i \\ c & 0 \end{pmatrix}$$
har vi
$$A^* = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}}(1-i) & \bar{c} \\ 3-4i & 0 \end{pmatrix}.$$
Alltså är
$$A\,A^* = \begin{pmatrix} 25+25 & \frac{5}{\sqrt{2}}(1+i)\bar{c} \\ \frac{5}{\sqrt{2}}(1-i)c & |c|^2 \end{pmatrix}$$
$$A^*A = \begin{pmatrix} 25+|c|^2 & \frac{5}{\sqrt{2}}(1-i)(3+4i) \\ \frac{5}{\sqrt{2}}(1+i)(3-4i) & 25 \end{pmatrix}.$$

Dessa två matriser är lika om och endast om $|c| = 5$ och $(1-i)c = (1+i)(3-4i)$ (kravet för det övre-högra elementet är komplexkonjugatet av detta). Med andra ord är A normal omm $|c| = 5$ och

$$c = \frac{1+i}{1-i}(3-4i) = \frac{(1+i)^2}{2}(3-4i) = i(3-4i) = 4+3i.$$

Eftersom detta c uppfyller att $|c| = 5$, så har vi hittat det unika värdet på c som gör att A är normal och, ekvivalent, att det finns en ON-bas för $\mathbb{C}^2$ bestående av egenvektorer för A.

Svar: Det enda sådana värdet på c är $c = 4+3i$.

5. (a) En singulärvärdesuppdelning av en sådan matris A är en faktorisering

$$A = U\Sigma V^* \quad \text{med} \quad U \in \mathrm{M}_{m\times m}(\mathbb{C}),\ \Sigma \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{C}),\ V \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$$

där

- U och V är unitära matriser,
- $\Sigma = \left(\begin{array}{cccc|c} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r & \\ \hline & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}\right)$ för reella $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$, där $r = \mathrm{rang}(A)$.

(b) Vi söker, per definition, en faktorisering $A = U\Sigma V^*$ där U och V är unitära matriser och

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix},$$

där $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0$ är A:s singulärvärden.

Vi vet att de nollskilda singulärvärdena för A precis motsvarar kvadratrötterna ur de nollskilda egenvärdena till A^*A, så vi beräknar denna matris.

Vi har att

$$A^*A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 17 \end{pmatrix}.$$

För att hitta egenvärdena beräknar vi det karaktäristiska polynomet

$$\det(A^*A - t\cdot I) = (9-t)(17-t) - 9 = t^2 - 26t + 144 = (t-18)(t-8).$$

Alltså är egenvärdena för A^*A talen 18 och 8, och därmed är singulärvärdena för A talen $\sigma_1 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ och $\sigma_2 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Alltså ges matrisen Σ av

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

För att hitta matrisen V beräknar vi egenvektorerna för A^*A motsvarande egenvärdena på sedvanligt sätt, och får

$$E_{18} = \mathrm{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad E_8 = \mathrm{span}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vi väljer normerade vektorer v_1, v_2 ur respektive egenrum och sätter

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}.$$

Nu låter vi V vara den ortogonala matrisen med dessa vektorer som kolonner:

$$V = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & -1\end{pmatrix}.$$

Det sista steget är att hitta en ortogonal 2×2-matris U som uppfyller villkoren, vilket vi gör genom att bestämma dess (ortogonala) kolonner u_1, u_2. För detta använder vi att $Av_i = \sigma_i u_i$, dvs att $u_i = \frac{1}{\sigma_i}Av_i$ (eftersom samtliga σ_i är nollskilda):

$$u_1 = \tfrac{1}{3\sqrt{2}}Av_1 = \frac{1}{6\sqrt{5}}\begin{pmatrix}6\\12\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

och

$$u_2 = \tfrac{1}{2\sqrt{2}}Av_2 = \frac{1}{4\sqrt{5}}\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}.$$

Därmed har vi:

Svar: En singulärvärdesuppdelning ges av $A = U\,\Sigma\,V^*$, där

$$U = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & -1\end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix}3\sqrt{2} & 0\\0 & 2\sqrt{2}\end{pmatrix} \qquad V = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & -1\end{pmatrix}.$$

6. (a) Definitionerna är att $N(T) = \{v \in V : T(v) = 0_V\}$ och $R(T) = \{T(v) : v \in V\}$.

   (b) Låt $v \in V$. Då är $(T\circ T)(v) = T(T(v))$, och eftersom $T(v) \in R(T) \subseteq N(T)$, dvs. $T(v)$ ligger i nollrummet till T, så är $T(T(v)) = 0_V$.

   (c) Eftersom V är 2-dimensionellt räcker det enligt kurssats att visa att u och $T(u)$ är linjärt oberoende. För att se detta, låt $a, b \in \mathbb{R}$ vara skalärer med

   $$a\,u + b\,T(u) = 0_V. \tag{1}$$

   Vi vill visa att både a och b måste vara 0. Genom att applicera T på båda led ser vi att

   $$a\,T(u) + b\,T(T(u)) = T(0_V) = 0_V.$$

   Eftersom $(T\circ T)(v) = 0_V$ för alla v enligt (b) så är $T(T(u)) = 0_V$, så ekvationen är ekvivalent med att

   $$a\,T(u) = 0_V.$$

   Eftersom $T(u) \neq 0_V$, då u inte ligger i $N(T)$, så är $a = 0$. Alltså ser vi från (1) att

   $$b\,T(u) = 0_V,$$

   vilket igen medför att $b = 0$. Alltså gäller

   $$a\,u + b\,T(u) = 0_V \implies a = b = 0,$$

   dvs. u och $T(u)$ är linjärt oberoende.

(d) Enligt dimensionssatsen så är

$$\dim N(S) + \dim R(S) = \dim \mathbb{R}^n = n,$$

så om $R(S) = N(S)$ så måste n vara ett jämnt tal. Vidare, om n är ett jämnt tal, säg $n = 2m$ med $m \in \mathbb{N}$, då finns det en avbildning S med $R(S) = N(S)$, t.ex. avbildningen

$$S(a_1, a_2, \ldots, a_{2m}) = (0, \ldots, 0, a_1, a_2, \ldots, a_m).$$

Svar: För jämna heltal n.