MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Gregory Arone

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
25 oktober 2024

Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas. Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Max antal poäng på tentan är 30, och 15 skrivningspoäng ger betyg åtminstone E.

Påminnelse. Kom ihåg att om $\mathbb{F}$ är en kropp så skriver vi

- $\mathrm{P}_n(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av polynom av grad högst n med koefficienter i $\mathbb{F}$ och
- $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av $m \times n$-matriser med element i $\mathbb{F}$.

Uppgifter.

1. (a) Låt $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ vara vektorer i ett vektorrum V över en kropp $\mathbb{F}$. Ange definitionen av att $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ *spänner upp* V. (2p)

   (b) Bestäm om vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ spänner upp $\mathbb{R}^3$. (1p)

   (c) Hitta en vektor $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ så att vektorerna (2p)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

   ger en bas för $\mathbb{R}^3$.

2. (a) Låt $T : V \to V$ vara en linjär operator på ett $\mathbb{F}$-vektorrum V. Ange definitionerna av begreppen *nollrumm* och *bildrum* för T. (1p)

   (b) Låt $T : \mathrm{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ vara den linjära operatorn som ges av (2p)

$$T(p) = p'(x) + p(0) + p''(0).$$

   Hitta en bas av nollrummet för T.

Var god vänd!

(c) Beräkna dimensionen för bildrummet för T. Avgör om T är surjektiv eller inte (2p)

3. Betrakta matrisen $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$.

   (a) Bestäm $\det(A^{10})$ (1p)

   (b) Bestäm en formel för A^n för positiva heltal n. (4p)

4. (a) Låt $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ vara en matris. Ange definitionerna av att A är *normal* respektive *unitär*. (1p)

   (b) Ge ett exempel på en matris av storlek 2×2 som är normal, men varken unitär eller självadjungerad. Ledtråd: det finns ett exempel som är en diagonal matris. (2p)

   (c) Låt $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara följande linjär operator: (2p)

$$T(x, y, z) = (2x + y, -x, 2y + x - 2z).$$

   Beskriv explicit en linjär avbildning $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som uppfyller följande likhet, för varje $\bar{u}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$

$$\langle T(\bar{u}), \bar{w}\rangle = \langle \bar{u}, L(\bar{w})\rangle.$$

   Där $\langle -, -\rangle$ betecknar standard inre produkten på $\mathbb{R}^3$.

5. Beräkna en singulärvärdesuppdelning av matrisen (5p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}).$$

6. (a) Visa att följande mängd av vektorer är en bas för $\mathbb{R}^3$ (1p)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   (b) Tillämpa Gram-Schmidt processen till basen i del (a) för att få en orthogonal bas för $\mathbb{R}^3$. (3p)

   (c) Hitta koordinaterna av vektorn $(6, 12, 24)$ respektivt basen som du hittade i del (b). (1p)

Rättningen av tentan kommer att vara färdig ungefär 2 veckor efter tentamensskrivning. Därefter kan en kopia av tentan beställas från studentexpeditionen.