MATEMATISKA INSTITUTIONEN	Tentamensskrivning i
STOCKHOLMS UNIVERSITET	Linjär algebra, MM5012
Avd. Matematik	7.5 hp
Examinator: Gregory Arone	25 oktober 2024

Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas. Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Max antal poäng på tentan är 30, och 15 skrivningspoäng ger betyg åtminstone E.

Påminnelse. Kom ihåg att om $\mathbb{F}$ är en kropp så skriver vi

- $\mathrm{P}_n(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av polynom av grad högst n med koefficienter i $\mathbb{F}$ och
- $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av $m \times n$-matriser med element i $\mathbb{F}$.

Uppgifter.

1. (a) Låt $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ vara vektorer i ett vektorrum V över en kropp $\mathbb{F}$. Ange definitionen av att $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ *spänner upp* V. (2p)

   Svar $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ spänner upp V om för varje $\bar{v} \in V$ det finns några $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ sådan att
   $$\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_n\bar{v}_n.$$

   (b) Bestäm om vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ spänner upp $\mathbb{R}^3$. (1p)

   Svar: Nej. $\mathbb{R}^3$ har dimension 3 så man behöver att ha minst tre vektorer för att spänna upp $\mathbb{R}^3$. Man kan också visa direkt att, t.ex., $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ kan inte skrivas som en linjär kombination av $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   (c) Hitta en vektor $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ så att vektorerna (2p)
   $$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Var god vänd!

ger en bas för $\mathbb{R}^3$.

Svar: En godtycklig vektor sådan att

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

är linjärt oberoende ska uppfylla villkoren. T.ex., $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. (a) Låt $T : V \to V$ vara en linjär operator på ett $\mathbb{F}$-vektorrum V. Ange definitionerna av begreppen *nollrumm* och *bildrum* för T. (1p)

Svar: Nollrummet till T definieras som

$$N(T) = \{\bar{v} \in V \mid T(\bar{v}) = \bar{0}\}.$$

Bildrummet definieras som

$$R(T) = \{\bar{w} \in V \mid \bar{w} = T(\bar{v}) \text{ för någon } \bar{v} \in V\}.$$

(b) Låt $T : \mathrm{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ vara den linjära operatorn som ges av (2p)

$$T(p) = p'(x) + p(0) + p''(0).$$

Hitta en bas av nollrummet för T.

Svar: låt $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathrm{P}_2(\mathbb{R})$. Vi har följande formel för T:

$$T(p) = a_0 + 2a_2 + a_1 + 2a_2x.$$

Det följer att $p \in N(T)$ om och endast om $a_2 = 0$ och $a_0 + a_1 = 0$. Nollrummet består av polynom av formen $a - ax$ för något reel tal a. Nollrummet har dimension 1, så dess bas ska bestå av ett godtyckligt icke-noll element, t.ex., $x - 1$.

(c) Beräkna dimensionen för bildrummet för T. Avgör om T är surjektiv eller inte (2p)

Svar: Enligt dimensionsatsten, $\dim(R(T)) = 3 - \dim(N(T)) = 2$. Eftersom $\dim(R(T)) < 3$, T inte är surjektiv.

3. Betrakta matrisen $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$.

(a) Bestäm $\det(A^{10})$ (1p)

Svar: $\det(A) = -18 + 20 = 2$. Därför $\det(A^{10}) = \det(A)^{10} = 2^{10}$.

(b) Bestäm en formel för A^n för positiva heltal n. (4p)

Svar: Vi borde diagonalisera A. Vi börjar med att hitta det karakteristiska polynomet

$$\det \begin{pmatrix} -3-t & -2 \\ 10 & 6-t \end{pmatrix} = (t+3)(t-6)+20 = t^2-3t+2 = (t-2)(t-1).$$

Rötterna av det karakteristiska polynomet är $t = 1, 2$. Nu hittar vi motsvarande egenvektorer. För egenvärde $t = 1$ får vi följande ekvationssystem

$$\begin{pmatrix} -3-1 & -2 \\ 10 & 6-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Det är likvärdigt med ekvationen $2x_1 + x_2 = 0$. En bas till egenrummet ges av vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

För egenvärde $t = 2$ får vi följande ekvationssystem

$$\begin{pmatrix} -3-2 & -2 \\ 10 & 6-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Det är likvärdigt med ekvationen $5x_1 + 2x_2 = 0$. En bas till egenrummet ges av vektorn $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ Låt $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$. Den är en bas som består av egenvektorer som hör till egenvärden $1, 2$. Då får vi basbytematrisen:

$$[\mathrm{Id}]_\alpha^{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Och dess invers blir matrisen

$$[\mathrm{Id}]_{\mathrm{st}}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi får följande formel för att diagonalisera A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Och därför

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2^{n+2} & 2-2^{n+1} \\ -10+5\cdot 2^{n+1} & -4+5\cdot 2^n \end{pmatrix}$$

4. (a) Låt $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ vara en matris. Ange definitionerna av att A är *normal* respektive *unitär*. (1p)

Svar: A är normal om $AA^* = A^*A$. A är unitär om $A^* = A^{-1}$.

(b) Ge ett exempel på en matris av storlek 2×2 som är normal, men varken unitär eller självadjungerad. Ledtråd: det finns ett exempel som är en diagonal matris. (2p)

Svar: Varje diagonalmatris är normal. Om en diagonalmatris har ett icke-reellt tal på diagonalen så kan den inte vara självadjungerad. Om en matris har determinant vars absolutbelopp inte är 1 så kan den inte vara unitär. Ett exempel på en normal matris som inte är självadjungerad eller unitär är därmed $\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) Låt $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara följande linjär operator: (2p)

$$T(x, y, z) = (2x + y, -x, 2y + x - 2z).$$

Beskriv explicit en linjär avbildning $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som uppfyller följande likhet, för varje $\bar{u}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$

$$\langle T(\bar{u}), \bar{w} \rangle = \langle \bar{u}, L(\bar{w}) \rangle.$$

Där $\langle -, - \rangle$ betecknar standard inre produkten på $\mathbb{R}^3$.

Svar: T representeras i standard basen med matrisen

$$[T]_{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Enligt definitionen $L = T^*$, d.v.s. L är den adjungerande operatorn till T. Vi vet att $[T^*]_{\mathrm{st}} = [T]^*_{\mathrm{st}}$. D.v.s., L representeras med den adjungerande matrisen av $[T]_{\mathrm{st}}$. Den är en reel matris, så adjungerande menar transponerande. Vi drar slutsatsen att L representeras med matrisen $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Det betyder att

$$L(x, y, z) = (2x - y + z, x + 2z, -2z).$$

5. Beräkna en singulärvärdesuppdelning av matrisen (5p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}).$$

Svar: Vi börjar med att räkna ut A^*A

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Nästa beräknar vi det karakteristiska polynomet

$$\det\begin{pmatrix} 5-t & 2 \\ 2 & 2-t \end{pmatrix} = (t-2)(t-5)-4 = t^2-7t+6 = (t-1)(t-6).$$

Egenvärdena, listade i fallande ordning, är alltså $t = 6, 1$, och vi vet att de singulära värdena för A är $\sqrt{6}, 1$. Nu beräknar vi en ON-bas som består av egenvektorer för A^*A. Vi börjar med egenvärde $t = 6$. Vi får följande ekvationssystem

$$\begin{pmatrix} 5-6 & 2 \\ 2 & 2-6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Den är likvärdig med ekvationen $-x_1 + 2x_2 = 0$. En normerad bas till egenrummet består av vektorn $\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

För egenvärde $t = 1$ får vi följande ekvationssystem

$$\begin{pmatrix} 5-1 & 2 \\ 2 & 2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Den är likvärdig med ekvationen $2x_1 + x_2 = 0$. En normerad bas till egenrummet består av vektorn $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

Vi vet nu att

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

och därför

$$U^* = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

För att hitta matrisen V, måste vi beräkna bilderna av egenvektorerna av A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{5}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

De två vektorerna är ortogonala, som förväntas. Vi måste dividera den första vektorn med $\sqrt{6}$ för att normalisera den. Också som förväntas. Då får vi två ON vektorer i $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{-1}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

För att komplettera det till en ON-bas kan man, till exempel, ta en kryssprodukt och få den vektorn $\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$. Vi kan nu skriva matrisen V

$$V = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Och singulärvärdesuppdelning blir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

6. (a) Visa att följande mängd av vektorer är en bas för $\mathbb{R}^3$ (1p)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Svar: Jag hoppas att det är klart.

(b) Tillämpa Gram-Schmidt processen till basen i del (a) för att få en orthogonal bas för $\mathbb{R}^3$. (3p)

Svar: Den första vektor av den ortogonala basen blir $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. För den andra vektoren beräknar vi

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

För den tredje vektoren får vi

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Vi får den ortogonala basen

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

Om man vill, kan man normera den och få en ON-bas.

(c) Hitta koordinaterna av vektorn $(6, 12, 24)$ respektivt basen som du hittade i del (b). (1p)

Svar: Enligt formeln för koordinater respektivt en ortogonal bas, har vi

$$\begin{bmatrix}6\\12\\24\end{bmatrix} = \frac{\left\langle \begin{bmatrix}6\\12\\24\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{\left\langle \begin{bmatrix}6\\12\\24\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix} + \frac{\left\langle \begin{bmatrix}6\\12\\24\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

Som förenklas sig till

$$\begin{bmatrix}6\\12\\24\end{bmatrix} = 9\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + 14\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix} + 15\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

Så koordinaterna är $(9, 14, 15)$.

Rättningen av tentan kommer att vara färdig ungefär 2 veckor efter tentamensskrivning. Därefter kan en kopia av tentan beställas från studentexpeditionen.