MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Gregory Arone

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
10 December 2024

Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas. Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Max antal poäng på tentan är 30, och 15 skrivningspoäng ger betyg åtminstone E.

Påminnelse. Kom ihåg att om $\mathbb{F}$ är en kropp så skriver vi

- $\mathrm{P}_n(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av polynom av grad högst n med koefficienter i $\mathbb{F}$ och
- $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av $m \times n$-matriser med element i $\mathbb{F}$.

Uppgifter.

1. (a) Låt V vara ett vektorrum över en kropp $\mathbb{F}$. Ange definitionen av ett *delrum* av V. (1p)
   (b) För var och en av följande delmängder av $\mathbb{R}^2$, avgör om den är ett delrum av $\mathbb{R}^2$.
      i. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 3y = 0\}$. (2p)
      ii. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$ (2p)

2. (a) Låt $T : V \to V$ vara en linjär operator på ett $\mathbb{F}$-vektorrum V. Ange definitionerna av begreppen egenvektor och egenvärde för T, samt vad det betyder för T att vara diagonaliserbar. (2p)
   (b) Låt $T : \mathrm{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ vara den linjära operatorn som ges av (3p)

$$T(p) = p'(x) + p(0) + p''(0).$$

   Beräkna alla egenvärden för T och baser för de tillhörande egenrummen, samt avgör om T är diagonaliserbar.

3. Låt $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildningen som ges av

$$T(x, y, z) = (x + y - 2z, y - 3z).$$

Var god vänd!

Också låt

$$\alpha = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$$

och

$$\beta = \{(2,1),(1,1)\}.$$

Man kan visa att α och β är (ordnade) baser till $\mathbb{R}^3$, resp. $\mathbb{R}^2$. Du får anta detta. Hitta matrisen $[T]_\alpha^\beta$ som representerar T med avseende på baserna α och β.

4. (a) Ange spektralsatsen, både för komplexa och reella matriser. (2p)

   (b) Låt (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Hitta en (kanske komplex) diagonal matris D och en unitär matris U sådant att

$$A = UDU^*.$$

5. Beräkna en singulärvärdesuppdelning av matrisen (5p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}).$$

6. Låt $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^1$ ges av

$$T(x,y,z,w) = x + 2y - z - 3w.$$

   (a) Hitta en bas till nollrummet av T. (2p)

   (b) Tillämpa Gram-Schmidt processen till basen i del (a) för att få en orthogonal bas för nollrummet av T. (3p)

Rättningen av tentan kommer att vara färdig ungefär 2 veckor efter tentamensskrivning. Därefter kan en kopia av tentan beställas från studentexpeditionen.