MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Gregory Arone

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
10 December 2024

Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas. Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Max antal poäng på tentan är 30, och 15 skrivningspoäng ger betyg åtminstone E.

Påminnelse. Kom ihåg att om $\mathbb{F}$ är en kropp så skriver vi

- $\mathrm{P}_n(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av polynom av grad högst n med koefficienter i $\mathbb{F}$ och
- $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av $m \times n$-matriser med element i $\mathbb{F}$.

Uppgifter.

1. (a) Låt V vara ett vektorrum över en kropp $\mathbb{F}$. Ange definitionen av ett *delrum* av V. (1p)
   Svar: Se korsboken eller kursens anteckningar.

   (b) För var och en av följande delmängder av $\mathbb{R}^2$, avgör om den är ett delrum av $\mathbb{R}^2$.

   i. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 3y = 0\}$. (2p)
   Svar: Ja, det är ett delrum. För att bevisa detta, måste vi visa att det är slutlig med avseende på addition och skalär multiplikation. Anta att (x_1, y_1) och (x_2, y_2) uppfyller villkoret. Då har vi att

   $$2(x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2) = 2x_1 - 3y_1 + 2x_2 - 3y_2 = 0 + 0 = 0.$$

   Det menar att $(x_1, y_1) + (x_2, y_2)$ uppfyller villkoret också. På liknande sätt, låt a vara en skalär. Då har vi $2ax_1 - 3ay_1 = a \cdot 0 = 0$, så $a(x_1, y_1)$ uppfyller villkoret.

   ii. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$ (2p)
   Svar: Nej det är inte ett delrum. T.ex., vektorerna $(2, 1)$ och $(-1, -2)$ både uppfyller villkoret, men deras summa är lika med $(1, -1)$, och den uppfyller inte villkoren.

2. (a) Låt $T : V \to V$ vara en linjär operator på ett $\mathbb{F}$-vektorrum V. Ange definitionerna av begreppen egenvektor och egenvärde för T, samt vad det betyder för T att vara diagonaliserbar. (2p)
   Svar: Se korsboken eller anteckningarna.

Var god vänd!

(b) Låt $T : \mathrm{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ vara den linjära operatorn som ges av (3p)

$$T(p) = p'(x) + p(0) + p''(0).$$

Beräkna alla egenvärden för T och baser för de tillhörande egenrummen, samt avgör om T är diagonaliserbar.

Svar: Rummet $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ har standardbasen $1, x, x^2$. Vi ser att $T(1) = 1$, $T(x) = 1$, och $T(x^2) = 2x + 2$. Det följer att T representeras i standardbasen av matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

För att hitta egenvärden beräknar vi det karakteristika polynomet. Det blir

$$\det \begin{bmatrix} 1-t & 1 & 2 \\ 0 & -t & 2 \\ 0 & 0 & -t \end{bmatrix} = t^2(1-t).$$

Ekvationen $t^2(1-t) = 0$ har två lösningar: $t = 0, 1$. Så T har två egenvärde $0, 1$. Nu hittar ve det motsvarande egenrum.

Egenrummet till egenvärde 0 består av lösningar till följande ekvation system:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösningarna är tripplar (x, y, z) som uppfyller $z = 0$ och $x + y = 0$. Det menar att egenrummet har dimension ett. En bas ges av, t.ex., vektorn $(-1, 1, 0)$. I termer av polynom, blir det polynom $x - 1$.

Egenrummet till egenvärde 1 består av lösningar till följande ekvation system:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Egenrummet till 1 består av tripplar av formlen $(x, 0, 0)$. Rummet har dimension ett, och en bas ges av vektorn $(1, 0, 0)$. Det motsvarande polynom är det konstanta polynom 1.

Summan av dimensioner av egenrum är två, som är mindre än tre. Det menar att T är inte diagonaliserbar.

3. Låt $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildningen som ges av

$$T(x, y, z) = (x + y - 2z, y - 3z).$$

Också låt

$$\alpha = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$$

och

$$\beta = \{(2,1),(1,1)\}.$$

Man kan visa att α och β är (ordnade) baser till $\mathbb{R}^3$, resp. $\mathbb{R}^2$. Du får anta detta.

Hitta matrisen $[T]_\alpha^\beta$ som representerar T med avseende på baserna α och β.

Svar: Låt oss beräkna koordinaterna i bas β av $T(1,1,0)$, $T(1,0,1)$ och $T(0,1,1)$. Dessa vektorer blir kolon av matrisen $[T]_\alpha^\beta$. $T(1,1,0) = (2,1)$. Det menar att koordinaterna av $T(1,1,0)$ i basen β är $(1,0)$.

$T(1,0,1) = (-1,-3)$. För att hitta koordinaterna in base β behöver man lösa ekvation system

$$(-1,-3) = x(2,1) + y(1,1).$$

Det är inte svårt att hitta lösningen $(x,y) = (2,-5)$.

Slutligen, $T(0,1,1) = (-1,-2) = -(2,1) - 2(1,1)$, så koordinaterna i bas β är $(-1,-2)$.

Vi vår svaret $[T]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -2 \end{bmatrix}$.

4. (a) Ange spektralsatsen, både för komplexa och reella matriser. (2p)

   Svar: Spektralsatsen för komplexa matriser säger att en komplex matris A kan diagonaliseras med en bas av ortonormerade egenvektorer om och bara om den är normal, d.v.s. $AA^* = A^*A$.

   Spektralsatsen för reella matriser säger att en reel matris A kan diagonaliseras med en bas av reella ortonormerade egenvektorer om och bara om den är symmetrisk, d.v.s. $A = A^t$.

   (b) Låt (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Hitta en (kanske komplex) diagonal matris D och en unitär matris U sådant att

$$A = UDU^*.$$

   Svar: Vi börjar med det karakteristika polynomet

$$\det \begin{bmatrix} -t & 0 & 2 \\ 0 & -t & 0 \\ -2 & 0 & -t \end{bmatrix} = -t^3 - 4t.$$

   Egenvärden är lösningarna till ekvationen $t^3 + 4t = 0$, som blir $t = 0, \pm 2i$. Därefter hittar vi motsvarande egenvektorer.

För $t = 0$ får vi följande ekvationssystem

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En normerad lösning är $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

För $t = 2i$ får vi ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} -2i & 0 & 2 \\ 0 & -2i & 0 \\ -2 & 0 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En normerad lösning är $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

För $t = -2i$ får vi ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 2i & 0 & 2 \\ 0 & 2i & 0 \\ -2 & 0 & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En normerad lösning är $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

Svaret är $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

5. Beräkna en singulärvärdesuppdelning av matrisen (5p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}).$$

Svar: Svaret är $A = U\Sigma V^t$, där

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

6. Låt $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^1$ ges av

$$T(x, y, z, w) = x + 2y - z - 3w.$$

(a) Hitta en bas till nollrummet av T. (2p)

Svar: Nollrummet bestäms av ekvationen $x = -2y + z + 3w$. En bas ges av vektorerna

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Tillämpa Gram-Schmidt processen till basen i del (a) för att få en orthogonal bas för nollrummet av T. (3p)

Svar: Enligt Gram-Schmidt processen borde vi beräkna

$$\bar{u}_k = \bar{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\bar{v}_k \cdot \bar{u}_j}{\bar{u}_j \cdot \bar{u}_j} \bar{u}_j$$

för $k = 1, 2, 3$.

Vi får

$$\bar{u}_1 = \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Du får kontrollera beräkningen själva.

Rättningen av tentan kommer att vara färdig ungefär 2 veckor efter tentamensskrivning. Därefter kan en kopia av tentan beställas från studentexpeditionen.