MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
18 mars 2025

Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas. Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Max antal poäng på tentan är 30, och 15 skrivningspoäng ger betyg åtminstone E.

Påminnelse.

- Om inget annat anges så används standard inre produkterna på vektorrummen $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{C}^n$.
- $\mathrm{P}_n(\mathbb{F})$ står för $\mathbb{F}$-vektorrummet av polynom av grad högst n med koefficienter i kroppen $\mathbb{F}$.
- $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ står för $\mathbb{F}$-vektorrummet av $m \times n$-matriser med element i kroppen $\mathbb{F}$.
- Om $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ så är $L_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ den linjära avbildningen som ges av $L_A(x) = Ax$.

Uppgifter.

1. (a) Låt $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vara vektorer i ett vektorrum V över en kropp $\mathbb{F}$. Ange definitionerna av att $v_1, v_2, \ldots, v_n$ är *linjärt oberoende* och att $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *spänner upp* V. (2p)

   (b) Finn $p(x)$ sådan att $1+x,\ x+x^2,\ x^2+x^3,\ p(x)$ är linjärt oberoende vektorer i $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$, och visa att de faktiskt är linjärt oberoende. (2p)

   (c) Avgör om de linjärt oberoende vektorerna $1+x,\ x+x^2,\ x^2+x^3,\ p(x)$ måste spänna upp $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$, oberoende av valet av $p(x)$. (1p)

2. Låt (5p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   och betrakta den linjära avbildningen $T : \mathrm{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ som ges av $T(x) = Ax$. Bestäm matrisen för T relativt standardbaserna för matrisvektorrummen $\mathrm{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ och $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Bestäm även rangen för T samt dimensionen för dess nollrum.

3. (a) Låt V vara ett vektorrum över en kropp $\mathbb{F}$. Ange definitionen av att en linjär operator $T : V \to V$ är *diagonaliserbar*. (1p)

   (b) Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära operatorn som ges av (4p)

$$T(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2,\ -2x_1).$$

   Ange en explicit formel för $T^{(n)}(x_1, x_2) = \overbrace{T\Big(T(\ldots T}^{n \text{ kopior av } T}(x_1, x_2)\ldots)\Big)$, dvs. ett explicit uttryck för vilken vektor (y_1, y_2) som (x_1, x_2) avbildas på om T utförs n gånger, som gäller för varje heltal $n \geq 1$. Använd formeln för att beräkna $T^{(5)}(1, 1)$, dvs. $T(T(T(T(T(1, 1)))))$.

Var god vänd!

4. (a) Låt $T : V \to V$ vara en linjär operator på ett inre produktrum V. Ange definitionerna av att T är *normal* respektive *självadjungerad*. (2p)

   (b) Avgör vilka av följande avbildningar som är diagonaliserbara relativt en ON-bas (för respektive vektorrum). (2p)

   i. $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ där $A = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

   ii. $L_B : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ där $B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (c) Ange en matris $C \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ som är normal men inte självadjungerad. (1p)

5. (a) Låt $U \in \mathrm{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$. Ange definitionen av att U är en *ortogonal* matris. (1p)

   (b) Beräkna en singulärvärdesuppdelning av matrisen (4p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}).$$

6. Låt V vara ett inre produktrum och låt U vara ett delrum till V.

   (a) Visa att $U \cap U^\perp = \{0_V\}$. (2p)

   (b) Låt W vara delrummet till $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av vektorn $(1, 1, 1)$. Ange en ortogonal bas för $W^\perp$. (1p)

   (c) Antag att $V = U + U^\perp$, dvs. att det för varje vektor $v \in V$ finns vektorer $u \in U$ och $w \in U^\perp$ sådana att $v = u + w$. Visa att vektorerna u och w i denna uppdelning är *unikt* bestämda av v. (2p)

Rättningen av tentan bör vara färdig ungefär 2 veckor efter tentamensskrivning. Därefter kan en kopia av tentan fås från studentexpeditionen:

`https://www.math.su.se/tentaåterlämning`