MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
18 mars 2025

Lösningsförslag.

1. (a) Vektorerna $v_1, v_2, \dots, v_n$ kallas *linjärt oberoende* om de enda skalärerna $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ för vilka $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0_V$ är $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

   Mängden $\{v_1, \dots, v_n\}$ sägs *spänna upp* V om det för varje $v \in V$ finns skalärer $a_1, \dots, a_n$ sådana att $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$.

   (b) Vi tar $p(x) = x^3$. Vektorerna $1+x, x+x^2, x^2+x^3, x^3$ är linjärt oberoende: för skalärer a_i gäller

$$
\begin{aligned}
&a_1(1+x) + a_2(x+x^2) + a_3(x^2+x^3) + a_4x^3 = 0 \\
\iff\ &a_1 + (a_1+a_2)x + (a_2+a_3)x^2 + (a_3+a_4)x^3 = 0 \\
\iff\ &a_1 = 0,\ a_1+a_2 = 0,\ a_2+a_3 = 0 \quad \text{och} \quad a_3+a_4 = 0 \\
\iff\ &a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0.
\end{aligned}
$$

   (c) Enligt utlärd sats så utgör n linjärt oberoende vektorer i ett n-dimensionellt vektorrum automatiskt en bas för rummet, dvs. vektorerna spänner även upp rummet. Eftersom $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$ har dimension 4 och vi har 4 linjärt oberoende vektorer, så säger satsen att de automatiskt spänner upp detta vektorrum.

2. Standardbaserna för $\mathrm{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ och $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ är

$$
B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (b_1, \dots, b_6)
$$

respektive

$$
C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (c_1, c_2, c_3, c_4).
$$

Matrisen för T relativt dessa baser är då, per definition,

$$
[T]_B^C = \begin{pmatrix} [T(b_1)]_C & [T(b_2)]_C & [T(b_3)]_C & [T(b_4)]_C & [T(b_5)]_C & [T(b_6)]_C \end{pmatrix}.
$$

Vi har

$$
T(b_1) = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = c_1,
$$

och därmed är

$$
[T(b_1)]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

På liknande sätt beräknar vi $[T(b_j)]_C$ för resterande j, t.ex.

$$T(b_6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 3c_2 + 2c_4 \implies [T(b_6)]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

och får slutligen

$$[T]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Enligt utlärd sats är rangen för T detsamma som rangen av $[T]_B^C$, och detta är uppenbarligen 4 eftersom de fyra raderna är linjärt oberoende.

Enligt dimensionssatsen är $\dim N(T) + \operatorname{rang}(T) = \dim \mathrm{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) = 6$, vilket ger att $\dim N(T) = 6 - 4 = 2$.

Svar:

$$[T]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{rang}(T) = 4, \qquad \dim N(T) = 2.$$

3. (a) En linjär operator $T : V \to V$ på ett ändligtdimensionellt vektorrum V kallas *diagonaliserbar* om det finns en bas för V bestående av egenvektorer till T, eller (ekvivalent) om det finns en bas B för V sådan att $[T]_B^B$ är en diagonalmatris.

   (b) För att beräkna $T^{(n)}(x_1, x_2)$ diagonaliserar vi T. Relativt standardbasen E för $\mathbb{R}^2$ är matrisen för T

$$[T]_E^E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Egenvärdena till T ges enligt utlärd sats av rötterna till dess karaktäristiska polynom

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Egenvärdena är alltså 1 och 2. För att hitta egenvektorer till T för dessa egenvärden löser vi ekvationssystemen $(A - 1I)x = 0$ och $(A - 2I)x = 0$ på sedvanligt sätt, vilket ger egenrummen

$$E_2 = \operatorname{span}\{(1,-1)\} \quad \text{och} \quad E_1 = \operatorname{span}\{(1,-2)\}.$$

Låt nu $B = ((1,-1),\ (1,-2))$; detta är en bas för $\mathbb{R}^2$ som består av egenvektorer för T, och relativt denna bas har vi

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alltså gäller (enligt satsen om relationen mellan sammansättning av linjära avbildningar och matrismultiplikation)

$$[T^{(n)}]_B^B = \left([T]_B^B\right)^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enligt satsen om basbyte gäller därför att

$$[T^{(n)}]_E^E = [\mathrm{id}]_B^E \ [T^{(n)}]_B^B \ [\mathrm{id}]_E^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2-2^n \end{pmatrix}.$$

Alltså är

$$T^{(n)}(x_1,x_2) = \Big((2^{n+1}-1)x_1 + (2^n-1)x_2,\ (2-2^{n+1})x_1 + (2-2^n)x_2\Big).$$

Slutligen ger detta att

$$T^{(5)}(1,1) = \Big((2^6-1)+(2^5-1),\ (2-2^6)+(2-2^5)\Big) = (94,-92).$$

Svar: Se ovan för $T^{(n)}(x_1,x_2)$, och $T^{(5)}(1,1) = (94,-92)$.

4. (a) Operatorn T kallas *normal* om $T \circ T^* = T^* \circ T$, och *självadjungerad* om $T = T^*$, där T^* står för den adjungerade avbildningen till T. (2p)

(b) i. För en linjär operator T på ett reellt inre produktrum gäller, enligt den reella spektralsatsen, att

$$T \text{ är ortogonalt diagonaliserbar} \iff T \text{ är självadjungerad,}$$

och detta gäller omm $[T]_C^C$ är självadjungerad/symmetrisk för någon ON-bas C för rummet. I det här fallet är A symmetrisk, och därmed är alltså L_A diagonaliserbar relativt en ON-bas.

ii. För en linjär operator T på ett komplext inre produktrum gäller, enligt den komplexa spektralsatsen, att

$$T \text{ är ortogonalt diagonaliserbar} \iff T \text{ är normal,}$$

och detta gäller omm $[T]_C^C$ är normal för någon ON-bas C för rummet. I det här fallet är B normal, eftersom

$$BB^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B^*B,$$

och därmed är L_B diagonaliserbar relativt en ON-bas.

(c) Matrisen B från den förra delfrågan är normal men inte självadjungerad. Men även t.ex. $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ har denna egenskap.

5. (a) Matrisen $U \in \mathrm{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ kallas *ortogonal* om $U^TU = UU^T = I$.

(b) Vi söker, per definition, en faktorisering $A = U\,\Sigma\,V^*$ där U och V är ortogonala matriser och Σ har formen $\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}$, där $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0$ är A:s singulärvärden.

Vi vet att de nollskilda singulärvärdena för A precis motsvarar kvadratrötterna ur de nollskilda egenvärdena till A^*A. Vi har att

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Eftersom matrisen är övertriangulär kan vi direkt läsa av de nollskilda egenvärdena: 2 och 8. Alltså ges matrisen Σ av

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{8} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

För att hitta matrisen V beräknar vi ON-baser för egenrummen för A^*A motsvarande egenvärdena 8 och 2. Eftersom A^*A är en diagonalmatris kan vi direkt läsa av basvektorer för egenrummen E_8 och E_2:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{resp.} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi kan sedan välja t.ex. $v_3 = (0, 1, 0)^T$ som en tredje enhetsvektor ortogonal mot v_1 och v_2, så att v_1, v_2, v_3 är ortonormala. Sedan tar vi v_1, v_2, v_3 som kolonner för V:

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

För att få fram U, med kolonner u_1 och u_2, använder vi att $Av_i = \sigma_i u_i$ för $i = 1, 2$, dvs att $u_i = \frac{1}{\sigma_i} Av_i$:

$$u_1 = \tfrac{1}{\sqrt{8}} Av_1 = \tfrac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} Av_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alltså har vi:

Svar: En singulärvärdesuppdelning ges av $A = U\,\Sigma\,V^*$, där

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{8} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Låt V vara ett inre produktrum och låt U vara ett delrum till V.

(a) Per definition är

$$U^{\perp} = \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0 \text{ för alla } u \in U\}.$$

Antag att $v \in U \cap U^{\perp}$. Då gäller $v \in U$ och $v \in U^{\perp}$, och det senare innebär att $\langle v, u \rangle = 0$ för alla $u \in U$. I synnerhet gäller detta för $u = v$, dvs. $\langle v, v \rangle = 0$, vilket ger att $v = 0_V$ per ett av axiomen för inre produkter.

(b) Enligt utlärd sats gäller $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, så $\dim W^{\perp} = 2$. De två vektorerna $(1, -1, 0)$ och $(1, 1, -2)$ ligger i $W^{\perp}$ (eftersom de är ortogonala mot $(1, 1, 1)$ och därmed mot hela W), och är ortogonala mot varandra. Alltså är $\{(1, -1, 0), (1, 1, -2)\}$ en ortogonal bas för $W^{\perp}$.

(c) Antag att det för någon vektor $v \in V$ gäller att $v = u_1 + w_1 = u_2 + w_2$ med $u_1, u_2 \in U$ och $w_1, w_2 \in U^{\perp}$. Vi vill visa att $u_1 = u_2$ och $w_1 = w_2$.

För att se detta, observera att $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$, och eftersom $u_1 - u_2 \in U$ och $w_2 - w_1 \in U^{\perp}$ måste båda dessa vektorer vara nollvektorn enligt del (a). Alltså är $u_1 = u_2$ och $w_1 = w_2$.