

Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas. Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Max antal poäng på tentan är 30, och 15 skrivningspoäng ger betyg åtminstone E.

Påminnelse.

- Om inget annat anges så används de vanliga inre produkterna på vektorrummen $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{C}^n$.
- $P_n(\mathbb{F})$ står för $\mathbb{F}$ -vektorrummet av polynom av grad högst n med koefficienter i kroppen $\mathbb{F}$.
- $M_{m \times n}(\mathbb{F})$ står för $\mathbb{F}$ -vektorrummet av $m \times n$ -matriser med element i kroppen $\mathbb{F}$.

Uppgifter.

- (a) Låt V vara ett vektorrum. För $v_1, \dots, v_n \in V$, ange definitionen av att $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ utgör en *bas* för V . (1p)
- (b) För ett ändligt dimensionellt vektorrum W , ange definitionen av $\dim W$. (1p)
- (c) Bestäm en bas för delrummet $W \subseteq \mathbb{R}^4$ som ges av (3p)

$$W = \text{span}\{(1, 1, 1, 1), (1, 4, 9, 16), (2, 4, 8, 16), (1, 2, 3, 2)\},$$

visa att det verkligen är en bas, samt bestäm $\dim W$.

- (a) Låt $T : V \rightarrow V$ vara en linjär operator på ett $\mathbb{F}$ -vektorrum V . Ange definitionerna av begreppen *egenvärde* och *egenrum* för T . (1p)
- (b) Låt $T : P_1(\mathbb{C}) \rightarrow P_1(\mathbb{C})$ vara den linjära operatorn som ges av (4p)

$$T(p(x)) = p(0) + p(1)x.$$

Ange matrisen $[T]_B^B$ för T relativt standardbasen B för $P_1(\mathbb{C})$, beräkna samtliga egenvärden för T , och bestäm för varje egenvärde en bas för motsvarande egenrum.

- Betrakta vektorrummet $\mathbb{R}^3$ utrustat med funktionen $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definierad av (5p)

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3,$$

där $x = (x_1, x_2, x_3)$ och $y = (y_1, y_2, y_3)$.

- Visa att denna funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle$ är en inre produkt på $\mathbb{R}^3$.
- Bestäm en ON-bas för $\mathbb{R}^3$ relativt denna inre produkt.

4. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

- (a) För $a, b \in \mathbb{R}$, visa att det inte finns någon ON-bas för $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer för A (oavsett vad a och b är). (2p)
- (b) Bestäm alla värden $a, b \in \mathbb{C}$ sådana att det finns en ON-bas för $\mathbb{C}^3$ som består av egenvektorer för A . (Ledning: egenvektorerna behöver inte beräknas. Det finns oändligt många sådana par (a, b) .) (3p)
5. (a) Låt A vara en reell matris med m rader, n kolonner och $\dim(\{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}) = r$. Ange hur många singularvärden A har, samt hur många som är strängt positiva. (1p)
- (b) Beräkna en singularvärdesuppdelning av matrisen (4p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R}).$$

6. Låt $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ vara en matris.

- (a) Ange definitionerna av att matrisen A är *normal* respektive *unitär*. (2p)
- (b) Visa att A är unitär om och endast om A är normal och $|\lambda| = 1$ för varje egenvärde λ för A . (Delpoäng kan fås för delar av beviset.) (3p)

Rättningen av tentan bör vara färdig inom 3 veckor efter tentamensskrivning. Därefter kan en kopia av tentan fås från studentexpeditionen:

<https://www.math.su.se/tentaåterlämning>