

Lösningsförslag.

1. (a) Den ordnade n -tupplen $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ utgör en bas för V om
 - den är linjärt oberoende, dvs om de enda skalärerna a_i för vilka $a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0$ är $a_1 = \dots = a_n = 0$, och
 - den spänner upp V : för varje $v \in V$ finns det skalärer a_i sådana att $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$.
- (b) Om W har en bas som består av n vektorer, då definierar vi dimensionen av W som n . (Detta är väldefinierat eftersom alla baser för W innehåller lika många vektorer, enligt kurssats.)
- (c) Vi kan t.ex. använda Gausseliminering på matrisen med de fyra angivna vektorerna som rader. Varje radoperation i elimineringsprocessen påverkar inte spannet av raderna, och om vi uppnår trappstegsform är det lätt att visa att de nollskilda raderna är linjärt oberoende, och därmed utgör en bas för W . Detta ger t.ex. basen

$$((1, 1, 1, 1), (0, 1, 2, 1), (0, 0, 1, 6)).$$

Alternativt: låt $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 4, 9, 16)$, $v_3 = (2, 4, 8, 16)$, $v_4 = (1, 2, 3, 2)$. Genom att lösa ett ekvationssystem kan vi se att $v_4 = 2v_1 + v_2 - v_3$. Alltså är

$$W = \text{span}\{(1, 1, 1, 1), (1, 4, 9, 16), (2, 4, 8, 16)\}.$$

Dessa tre vektorer spänner upp W , och kan ses vara linjärt oberoende genom att lösa ekvationssystemet $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$ (som vi ej redovisar här) och observera att $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ är den enda lösningen. Alltså utgör de en bas, och därmed är $\dim W = 3$.

Svar: En bas för W är t.ex. $\{(1, 1, 1, 1), (1, 4, 9, 16), (2, 4, 8, 16)\}$ och $\dim W = 3$.

2. (a) En skalär $\lambda \in F$ kallas ett egenvärde för T om det finns en nollskild vektor $v \in V$ sådan att $T(v) = \lambda v$. Egenrummet motsvarande egenvärdet λ är delrummet $E_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$.
- (b) Standardbasen för $P_1(\mathbb{C})$ är $B = (1, x)$. Per definition är därför

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} [T(1)]_B & [T(x)]_B \end{pmatrix}_B.$$

Vi beräknar

$$T(1) = 1 + x \implies [T(1)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad T(x) = x \implies [T(x)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alltså är

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Var god vänd!

Vi kan nu beräkna egenvärdena genom att hitta det karaktäristiska polynomet

$$\det([T]_B^B - tI) = (1 - t)^2,$$

som har roten $t = 1$ med algebraisk multiplicitet 2. Därmed är $\lambda = 1$ det enda egenvärdet för T .

Det motsvarande egenrummet kan beräknas med hjälp av matrisen $[T]_B^B$, eller direkt från definitionen:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{p \in P_1(\mathbb{C}) : T(p) = p\} \\ &= \{a + bx \in P_1(\mathbb{C}) : a + (a + b)x = a + bx\} \\ &= \{a + bx : a = 0\} \\ &= \text{span}\{x\}. \end{aligned}$$

Alltså är $\{x\}$ en bas för E_1 .

Svar: Matrisen är $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, det enda egenvärdet är 1, och en bas för egenrummet E_1 är $\{x\}$.

3. (a) Vi behöver visa att den är linjär i första komponenten, symmetrisk och positiv definit:

- Linjär i första komponenten: för $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ och $a \in \mathbb{R}$ har vi

$$\begin{aligned} \langle x + y, z \rangle &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \\ \text{och} \quad \langle ax, y \rangle &= a\langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Detta gäller uppenbarligen för vår funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle x + y, z \rangle &= (x_1 + y_1)z_1 + 2(x_2 + y_2)z_2 + 3(x_3 + y_3)z_3 \\ &= x_1z_1 + 2x_2z_2 + 3x_3z_3 + y_1z_1 + 2y_2z_2 + 3y_3z_3 \\ &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \end{aligned}$$

och

$$\langle ax, y \rangle = ax_1y_1 + 2ax_2y_2 + 3ax_3y_3 = a(x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3) = a\langle x, y \rangle.$$

- Symmetrisk: för $x, y \in \mathbb{R}^3$ har vi

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 \\ &= y_1x_1 + 2y_2x_2 + 3y_3x_3 = \langle y, x \rangle. \end{aligned}$$

- Positiv definit: för $x \in \mathbb{R}^3$ har vi

$$\langle x, x \rangle = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 \geq 0,$$

med likhet om och endast om $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, dvs $x = 0$.

(b) En ON-bas är en bas som är ortonormal, dvs varje vektor i basen har norm 1 och är ortogonal mot alla andra vektorer i basen.

Det ses lätt att vektorerna

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0), \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 0, 1)$$

är ortogonala relativt denna inre produkt, dvs att $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ för $i \neq j$. Vidare så ges normerna av dessa vektorer av

$$\begin{aligned}\|e_1\| &= \sqrt{\langle e_1, e_1 \rangle} = \sqrt{1^2 + 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0^2} = 1, \\ \|e_2\| &= \sqrt{\langle e_2, e_2 \rangle} = \sqrt{0^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3 \cdot 0^2} = 1, \\ \|e_3\| &= \sqrt{\langle e_3, e_3 \rangle} = \sqrt{0^2 + 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1.\end{aligned}$$

Alltså utgör vektorerna en ON-bas för $\mathbb{R}^3$ relativt den givna inre produkten.

4. (a) Enligt den reella spektralsatsen finns det en ON-bas för $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer för A om och endast om A är självadjungerad/symmetrisk, dvs $A^T = A$. Eftersom matrisen har en 0:a högst upp till höger och en 1:a längst ner till vänster, är $A^T \neq A$, oavsett a, b . Alltså finns det ingen ON-bas för $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer för A .
- (b) Enligt den komplexa spektralsatsen finns det en ON-bas för $\mathbb{C}^3$ som består av egenvektorer för A om och endast om A är normal, dvs $A^*A = AA^*$. Vi beräknar

$$\begin{aligned}A^*A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \bar{a} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \bar{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ \bar{a} & 1+|a|^2 & 1 \\ \bar{b} & 1 & 1+|b|^2 \end{pmatrix}, \\ AA^* &= \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \bar{a} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \bar{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+|a|^2 & a & 1 \\ \bar{a} & 2 & \bar{b} \\ 1 & b & 1+|b|^2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dessa matriser är lika om och endast om

$$|a|^2 = 1 \quad \text{och} \quad b = 1.$$

Kravet $|a| = 1$ motsvarar att a ligger på enhetscirkeln i det komplexa talplanet, dvs $a = e^{i\theta}$ för något $\theta \in \mathbb{R}$.

Svar: Det finns en ON-bas för $\mathbb{C}^3$ som består av egenvektorer för A om och endast om $|a| = 1$ och $b = 1$.

5. (a) Enligt definitionen av singularvärden, från satsen om singularvärdesuppdelning, har matrisen $k = \min(m, n)$ stycken singularvärden $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k \geq 0$. Antalet strängt positiva singularvärden är lika med $\text{rang}(A) = r$ (dimensionen av bildrummet $\{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$).
- (b) Vi söker, per definition, en faktorisering $A = U \Sigma V^*$ där U och V är ortogonala matriser och

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

där $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0$ är A 's singularvärden. Vi kan direkt konstatera att $\sigma_1 > 0$ och $\sigma_2 = 0$, eftersom $\text{rang}(A) = 1$.

Vi vet att de nollskilda singularvärdena för A precis motsvarar kvadratrötterna ur de nollskilda egenvärdena till A^*A , så vi beräknar denna matris.

Vi har att

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

För att hitta egenvärdena beräknar vi det karakteristiska polynomet

$$\det(A^*A - t \cdot I) = (5 - t)^2 - 5^2 = t(t - 10).$$

Alltså är egenvärdena för A^*A talen 10 och 0, och därmed är singularvärdena för A talen $\sigma_1 = \sqrt{10}$ och $\sigma_2 = 0$. Alltså ges matrisen Σ av

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

För att hitta matrisen V beräknar vi egenvektorerna för A^*A motsvarande egenvärdet 10 på sedvanligt sätt, och får

$$E_{10} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi väljer en normerad vektor v_1 ur detta egenrum och väljer godtyckligt en enhetsvektor v_2 som är ortogonal mot denna:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nu låter vi V vara matrisen med dessa vektorer som kolonner; denna matris är ortogonal per konstruktion:

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Det sista steget är att hitta en ortogonal 3×3 -matris U som uppfyller villkoren, vilket vi gör genom att bestämma dess (ortogonala) kolonner u_1, u_2, u_3 . För detta använder vi att $Av_1 = \sigma_1 u_1$, dvs att $u_1 = \frac{1}{\sigma_1} Av_1$:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} Av_1 = \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Eftersom resten av singularvärdena är 0 är vi fria att välja kolonnerna u_2, u_3 godtyckligt så att U är en ortogonal matris. Vi tar

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

som lätt ses vara enhetsvektorer och ortogonala mot varandra och u_1 . Därmed har vi:

Svar: En singularvärdesuppdelning ges av $A = U \Sigma V^*$, där

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Obs: A har precis $\text{rang}(A) = 1$ nollskilt singularvärde.)

6. (a) Matrisen A kallas *normal* om $A^*A = AA^*$, där $A^* = \overline{A}^T$ är dess adjungat. Den kallas *unitär* om $A^*A = AA^* = I$, dvs $A^{-1} = A^*$.

(b) **Förslag 1**

" $\implies$ ": Antag att A är unitär. Eftersom $A^*A = AA^* = I$ så är A uppenbarligen normal. Vi ska nu visa att $|\lambda| = 1$ för varje egenvärde λ till A . Låt v vara en egenvektor till A med egenvärdet λ , dvs $Av = \lambda v$. Vi har då

$$\|Av\|^2 = \langle Av, Av \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = |\lambda|^2 \langle v, v \rangle = |\lambda|^2 \|v\|^2.$$

Eftersom A är unitär så är $\|Av\| = \|v\|$ (enligt kurssats; alternativt $\|Av\|^2 = \langle Av, Av \rangle = \langle v, A^*Av \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$), och vi får att

$$\|v\|^2 = \|Av\|^2 = |\lambda|^2 \|v\|^2.$$

Eftersom $v \neq 0$ så är $\|v\|^2 > 0$, och vi kan dividera med detta för att få

$$1 = |\lambda|^2,$$

vilket ger $|\lambda| = 1$.

" $\impliedby$ ": Antag att A är normal och att $|\lambda| = 1$ för varje egenvärde λ till A . Vi ska nu visa att A är unitär, och för detta räcker det att visa att $A^*A = I$. Eftersom A är normal så finns det, enligt den komplexa spektralsatsen, en ON-bas $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ för $\mathbb{C}^n$ bestående av egenvektorer för A . Låt oss kalla de motsvarande egenvärdena för λ_i , dvs $Av_i = \lambda_i v_i$; vi vet enligt antagande att $|\lambda_i| = 1$ för varje i .

Enligt kurssats är varje v_i också en egenvektor till A^* med egenvärdet $\overline{\lambda_i}$, dvs $A^*v_i = \overline{\lambda_i}v_i$, eftersom A är normal. Alltså är, för varje i ,

$$A^*Av_i = A^*(\lambda_i v_i) = \lambda_i A^*v_i = \lambda_i \overline{\lambda_i} v_i = |\lambda_i|^2 v_i = v_i.$$

Eftersom vektorerna v_i utgör en bas för $\mathbb{C}^n$ så innebär detta att

$$A^*Av = v \text{ för varje } v \in \mathbb{C}^n.$$

Alltså är $A^*A = I$, och vi har att A är unitär.

Alternativt så kan vi visa att $\|Av\| = \|v\|$ för varje $v \in \mathbb{C}^n$, vilket är ett ekvivalent villkor för att A ska vara unitär. Eftersom $(v_1, \dots, v_n)$ utgör en ON-bas för $\mathbb{C}^n$ så kan varje $v \in \mathbb{C}^n$ uttryckas som

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

för några $c_j \in \mathbb{C}$. Enligt kurssats om koordinater relativt ON-baser så är

$$\|v\|^2 = |c_1|^2 + |c_2|^2 + \dots + |c_n|^2.$$

Därmed gäller det att

$$\begin{aligned} \|Av\|^2 &= \|c_1 Av_1 + c_2 Av_2 + \dots + c_n Av_n\|^2 \\ &= \|\lambda_1 c_1 v_1 + \dots + \lambda_n c_n v_n\|^2 \\ &= |\lambda_1|^2 |c_1|^2 + \dots + |\lambda_n|^2 |c_n|^2 \\ &= |c_1|^2 + \dots + |c_n|^2 \\ &= \|v\|^2. \end{aligned}$$

Alltså är A unitär.

Förslag 2

Eftersom en unitär matris uppenbarligen är normal, så räcker det att visa följande påstående om normala matriser A :

$$A \text{ är unitär} \iff |\lambda| = 1 \text{ för varje egenvärde } \lambda \text{ för } A.$$

Bevis: Eftersom A är normal så finns det, enligt komplexa spektralsatsen, en unitär matris Q sådan att

$$A = QDQ^*,$$

där

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

är en diagonalmatris med A 's egenvärden $\lambda_j \in \mathbb{C}$ på diagonalen. (Kolumnerna i Q består av motsvarande egenvektorer från en ON-bas av egenvektorer för A .)

Alltså är

$$A^*A = (QD^*Q^*)(QDQ^*) = QD^*DQ^* = Q \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} Q^*.$$

Matrisen A är unitär om och endast om detta är lika med identitetsmatrisen I :

$$QD^*DQ^* = I \iff D^*D = Q^*Q = I \iff \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} = I.$$

Detta gäller om och endast om $|\lambda_j| = 1$ för varje j , vilket var det vi ville visa.