

Skriv tydligt och motivera dina lösningar väl. Skrivtiden är 5 timmar. Inga hjälpmedel utöver penna och suddgummi är tillåtna. Visa legitimation. Maximalt antal poäng är 30 och 15 poäng ger betyget åtminstone E.

För betygen E, D, C, B, A krävs minst följande antal poäng:

E	D	C	B	A
15	18	21	24	27

Bonuspoäng från kontrollskrivningarna gör att du kan tillgodoräkna deluppgifter till Uppgift 1 enligt följande:

Bonuspoäng	Antal deluppgifter som kan tillgodoräknas
24 - 30	3
16 - 23	2
8 - 15	1

Lycka till!

Uppgift 1

- (a) Avgör om delmängden $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ är ett delrum av vektorrummet $\mathbb{R}^2$. (1p)
- (b) Definiera begreppet *ortogonalt komplement* $W^\perp$ till ett delrum W av ett inre produktrum V . (1p)
- (c) Låt $L: V \rightarrow U$ vara en linjär avbildning mellan vektorrum V och U av ändlig dimension. Vad säger *dimensionssatsen*? Dvs. vad gäller för dimensionen av kärnan/nollrummet respektive bilden/bildrummet av L ? (1p)

Uppgift 2 Hitta en ortogonal bas $\{v_1, v_2, v_3\}$ för $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ (polynom av grad högst 2) med avseende på inre produkten $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 fg \, dx$, sådan att $v_1 = x^2$. (5p)

Uppgift 3

- (a) Låt λ vara ett egenvärde till en linjär operator L . Definiera begreppen *geometrisk multiplicitet* $m_g(\lambda)$ och *algebraisk multiplicitet* $m_a(\lambda)$. (1p)
- (b) Hitta alla egenvärden till operatoren $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ som i standardbasen har matrisen (2p)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (c) Avgör huruvida L är diagonaliserbar. (2p)

Var god vänd!

Uppgift 4

- (a) Definiera begreppet *inre produkt* på ett vektorrum V över k ($\mathbb{C}$ eller $\mathbb{R}$). (1p)
- (b) Låt $\{v_1, \dots, v_n\}$ vara en ordnad bas för V och $\langle -, - \rangle$ en inre produkt på V . Låt $A = (a_{ij})$ vara matrisen som definieras av $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$. Visa att A är självdjunderad och, om $k = \mathbb{R}$, symmetrisk. Vad gäller för diagonalelementen i matrisen A ? (2p)
- (c) Låt L vara en operator på ett inre produktrum V av ändlig dimension. Visa (utan att hänvisa till satserna om isometrier och unitära operatorer) att om L bevarar den inre produkten (dvs $\langle Lx, Ly \rangle = \langle x, y \rangle$ för alla x, y) så är L normal. Du får använda dig av resultat från föreläsningarna om inre produkter samt dimensionssatsen. (2p)

Uppgift 5 Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Hitta singularvärderna till A . (2p)
- (b) Beräkna en singularvärdesuppdelning av A . (4p)

Uppgift 6 Betrakta $\mathbb{C}$ som ett vektorrum över $\mathbb{R}$ med (standard) inre produkten $\langle z, w \rangle = \operatorname{Re}(z\overline{w})$, där Re betecknar den reella delen (om $z = a + bi$ där a, b är reella tal så är $\operatorname{Re}(z) = a$). Vi kallar detta inre produktrum för V . Låt u vara ett komplext tal med $|u| = 1$.

- (a) Hitta adjunkten L^* till den linjära avbildningen $L: V \rightarrow V$ definierad av $L(z) = uz$. (2p)
- (b) Visa att L är en isometri, dvs. $L^*L = I$, utan att hänvisa till någon sats om isometrier. (2p)
- (c) För vilka värden på u är L diagonaliserbar? (2p)

Rättning av tentan bör vara färdig inom tre veckor och en kopia av rättad tenta skickas sedan ut via mail. Se <https://www.math.su.se/tentaaterlämning> för mer information.