

Skriv tydligt och motivera dina lösningar väl. Skrivtiden är 5 timmar. Inga hjälpmedel utöver penna och suddgummi är tillåtna. Visa legitimation. Maximalt antal poäng är 30 och 15 poäng ger betyget åtminstone E.

Uppgift 1

- (a) Avgör om delmängden $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ är ett delrum av vektorrummet $\mathbb{R}^2$. (1p)
- (b) Definiera begreppet *ortogonalt komplement* $W^\perp$ till ett delrum W av ett inre produktrum V . (1p)
- (c) Låt $L: V \rightarrow U$ vara en linjär avbildning mellan vektorrum V och U av ändlig dimension. Vad säger *dimensionssatsen*? Dvs. vad gäller för dimensionen av kärnan/nollrummet respektive bilden/bildrummet av L ? (1p)

Lösning: (a) Nej, eftersom $(1, 0)$ och $(0, 1)$ ligger i W men deras summa $(1, 1)$ inte gör det.

(b) $W^\perp$ är precis de vektorer $v \in V$ sådana att $\langle v, w \rangle = 0$ för alla $w \in W$, dvs.

$$W^\perp = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0 \text{ för alla } w \in W\}.$$

(c) Dimensionssatsen säger att $\dim(\ker L) + \dim(\operatorname{im} L) = \dim V$.

Uppgift 2 Hitta en ortogonal bas $\{v_1, v_2, v_3\}$ för $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ (polynom av grad högst 2) med avseende på inre produkten $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 fg \, dx$, sådan att $v_1 = x^2$. (5p)

Lösning: Vi använder oss av Gram–Schmidts metod och utgår från basen $\{x^2, x, 1\}$. Eftersom $f(x) = x \cdot x^2 = x^3$ är en udda funktion (dvs. $f(-a) = -f(a)$ för alla $a \in \mathbb{R}$) så är $\int_{-1}^1 f(x) \, dx = 0$. Därmed är $v_2 = x$ ortogonal mot v_1 . På samma vis ser vi att 1 är ortogonal mot x , dock ej mot x^2 . Vi kan därför ta $v_3 = 1 - \frac{\langle 1, x^2 \rangle}{\langle x^2, x^2 \rangle} x^2 = 1 - \frac{2/3}{2/5} x^2 = 1 - \frac{5}{3} x^2$. En ortogonal bas är alltså

$$\{x^2, x, 1 - \frac{5}{3}x^2\}.$$

Uppgift 3

- (a) Låt λ vara ett egenvärde till en linjär operator L . Definiera begreppen *geometrisk multiplicitet* $m_g(\lambda)$ och *algebraisk multiplicitet* $m_a(\lambda)$. (1p)
- (b) Hitta alla egenvärden till operatorn $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ som i standardbasen har matrisen (2p)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (c) Avgör huruvida L är diagonaliserbar. (2p)

Lösning: (a) $m_g(\lambda) := \dim(\ker(L - \lambda I))$ och $m_a(\lambda)$ är multipliciteten hos λ som rot i det karaktäristiska polynomet, dvs. det största positiva heltal n så att $(x - \lambda)^n$ delar $p_L(x)$.
 (b) Det karaktäristiska polynomet är

$$\begin{aligned} p_L(x) &= \det(A - xI) \\ &= (2 - x) \det \begin{pmatrix} 3 - x & -1 \\ -1 & 3 - x \end{pmatrix} \\ &= (2 - x)((3 - x)^2 - 1) \\ &= -(x - 2)^2(x - 4). \end{aligned}$$

Eigenvärdena är alltså 2 (med algebraisk multiplicitet 2) och 4 (med algebraisk multiplicitet 1).

(c) Egenrummet för egenvärdet 2 är

$$\ker(A - 2I) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

vilket har dimension 1 (t.ex. basen $\{(1, 0, 1)\}$ för kärnan och basen $\{(1, 0, -1), (1, 0, 1)\}$ för bilden). Detta ger att $m_g(2) = 1 < 2 = m_a(2)$ och därmed är L ej diagonaliserbar, av Sats [Karakterisering av diagonaliserbarhet II].

Uppgift 4

- (a) Definiera begreppet *inre produkt* på ett vektorrum V över k ($\mathbb{C}$ eller $\mathbb{R}$). (1p)
- (b) Låt $\{v_1, \dots, v_n\}$ vara en ordnad bas för V och $\langle -, - \rangle$ en inre produkt på V . Låt $A = (a_{ij})$ vara matrisen som definieras av $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$. Visa att A är självdjungerad och, om $k = \mathbb{R}$, symmetrisk. Vad gäller för diagonalelementen i matrisen A ? (2p)
- (c) Låt L vara en operator på ett inre produktrum V av ändlig dimension. Visa (utan att hänvisa till satserna om isometrier och unitära operatorer) att om L bevarar den inre produkten (dvs $\langle Lx, Ly \rangle = \langle x, y \rangle$ för alla x, y) så är L normal. Du får använda dig av resultat från föreläsningarna om inre produkter samt dimensionssatsen. (2p)

Lösning: (a) En inre produkt på V är en funktion $f: V \times V \rightarrow k$ som är som är:

- Konjugat-symmetrisk: $f(v, w) = \overline{f(w, v)}$ för alla $v, w \in V$.
- Linjära i första argumentet: $f(av_1 + bv_2, w) = af(v_1, w) + bf(v_2, w)$ för alla $v_1, v_2, w \in V$ och alla $a, b \in k$.
- Positiv definit: $f(v, v) > 0$ för alla $v \neq 0$.

(b) Eftersom adjunkten till en matris ges av komplexkonjugatet till transponatet så har vi $(A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}} = \overline{\langle v_j, v_i \rangle} = \langle v_i, v_j \rangle = (A)_{ij}$, dvs. A är självdjungerad. Om $k = \mathbb{R}$ har vi dessutom $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle = \langle v_j, v_i \rangle = a_{ji}$, dvs. A är symmetrisk. Diagonalelementen i A är reella och positiva: $a_{ii} = \langle v_i, v_i \rangle > 0$ för alla i .

(c) Vi har att $\langle v, w \rangle = \langle L(v), L(w) \rangle = \langle v, L^*L(w) \rangle$ för alla v, w , vilket medför att $L^*L = I$. Då är L injektiv och eftersom V har ändlig dimension är L också surjektiv, dvs en isomorfi med invers L^* . Därmed är också $LL^* = I$ och vi får $L^*L = LL^*$, så L är normal.

Uppgift 5 Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Hitta singularvärdena till A .

(2p)

(b) Beräkna en singularvärdesuppdelning av A .

(4p)

Lösning: (a) Singularvärdena är kvadratrötterna av egenvärdena till A^*A (vilka är positiva och reella). Vi börjar med att beräkna $A^*A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$. Det karakteristiska polynomet är $p_{A^*A}(x) = (3-x)(2-x) - 2 = x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$, så egenvärdena är 1 och 4. Alltså är singularvärdena $\sigma_1 = 2$ och $\sigma_2 = 1$.

(b) En singularvärdesuppdelning av A är en faktorisering av A på formen $A = U_2 \Sigma U_1^*$, där U_1 och U_2 är unitära/ortogonala matriser (i synnerhet kvadratiska) och Σ är en diagonalmatris (ej nödvändigtvis kvadratisk) med singularvärdena på diagonalen. Egenrummet för egenvärdet 4 är

$$\ker(A^*A - 4I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix},$$

vilket har dimension 1 och basen $\{(\sqrt{2}, 1)\}$. Egenrummet för egenvärdet 1 är

$$\ker(A^*A - I) = \ker \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix},$$

vilket har dimension 1 och basen $\{(-1, \sqrt{2})\}$. Vi sätter

$$U_1 = (u_1 \ u_2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Slutligen väljer vi

$$w_1 = \frac{1}{\sigma_1} A u_1 = \frac{1}{2} A \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

och

$$w_2 = \frac{1}{\sigma_2} A u_2 = A \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} + 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Vi kompletterar med en (normal) vektor w_3 , ortogonal mot w_1 och w_2 , och sätter

$$U_2 = (w_1 \ w_2 \ w_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Detta ger singularvärdesuppdelningen $A = U_2 \Sigma U_1^*$.

Uppgift 6 Betrakta $\mathbb{C}$ som ett vektorrum över $\mathbb{R}$ med (standard) inre produkten $\langle z, w \rangle = \operatorname{Re}(z\bar{w})$, där Re betecknar den reella delen (om $z = a + bi$ där a, b är reella tal så är $\operatorname{Re}(z) = a$). Vi kallar detta inre produktrum för V . Låt u vara ett komplext tal med $|u| = 1$.

- (a) Hitta adjunkten till den linjära avbildningen $L: V \rightarrow V$ definierad av $L(z) = uz$. (2p)
- (b) Visa att L är en isometri, dvs. $L^*L = I$, utan att hänvisa till någon sats om isometrier. (2p)
- (c) För vilka värden på u är L diagonaliserbar? (2p)

Lösning: (a) Adjunkten definieras av att $\langle L(z), w \rangle = \langle z, L^*(w) \rangle$ för alla $z, w \in V$. Med inre produkten $\langle z, w \rangle = \operatorname{Re}(z\bar{w})$ ser vi att $\operatorname{Re}(uz\bar{w}) = \operatorname{Re}(z\bar{u}w)$, dvs. $L^*(w) = \bar{u}w$.
 (b) Vi har att $L^*L(z) = \bar{u}uz = |u|z = z$ för alla $z \in V$, vilket säger att $L^*L = I$.
 (c) L är en rotation som skickar 1 på u och $i = \sqrt{-1}$ på ui . Denna rotation är diagonaliserbar om och endast om $u = 1$ eller $u = -1$, dvs. om och endast om u är reellt. Mycket riktigt, matrisen till L i basen $\beta = \{1, i\}$ är

$$[L]_\beta = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(u) & -\operatorname{Im}(u) \\ \operatorname{Im}(u) & \operatorname{Re}(u) \end{pmatrix},$$

vilken har karakteristiskt polynom $p_L(x) = x^2 - 2\operatorname{Re}(u)x + 1 = 0$ och rötter $\operatorname{Re}(u) \pm \sqrt{\operatorname{Re}(u)^2 - 1} = \operatorname{Re}(u) \pm \operatorname{Im}(u)$. Detta är precis u och $\bar{u}$, vilka är reella exakt när $\operatorname{Im}(u) = 0$, dvs. när u är reellt. Alltså splittrar det karakteristiska polynomet över $\mathbb{R}$ om och endast om u är reellt. I detta fall är matrisen diagonal, så uppenbart diagonaliserbar.

Rättning av tentan bör vara färdig inom tre veckor och en kopia av rättad tenta skickas sedan ut via mail. Se <https://www.math.su.se/tentaaterlämning> för mer information.