

Skriv tydligt och motivera dina lösningar väl. Skrivtiden är 5 timmar. Inga hjälpmedel utöver penna och suddgummi är tillåtna. Visa legitimation. Maximalt antal poäng är 30 och 15 poäng ger betyget åtminstone E.

Bonuspoäng från terminens kontrollskrivningar gör att du kan tillgodoräkna (valfria) deluppgifter till Uppgift 1 enligt följande:

Bonuspoäng	Antal deluppgifter som kan tillgodoräknas
24 - 30	3
16 - 23	2
8 - 15	1

Uppgift 1

- (a) Betrakta den linjära avbildningen $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ som ges av $L(x, y) = (x, 2x + y)$ och låt $S \subseteq \mathbb{R}^2$ vara mängden av alla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sådana att $L(x, y) = (0, 0)$ eller $L(x, y) = (1, 1)$. Bestäm om S är ett delrum av $\mathbb{R}^2$ och motivera ditt svar. (1p)
- (b) Antag att vi har ett linjärt ekvationssystem $Ax = b$ där A är en $m \times n$ -matris med reella tal, $b \in \mathbb{R}^m$ och $n > m$. Givet att vi har en vektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ som löser ekvationssystemet, vad kan vi säga om antalet lösningar till ekvationssystemet? Skulle x_0 kunna vara den enda lösningen? Motivera ditt svar. (1p)
- (c) Låt $L: V \rightarrow V$ vara en linjär avbildning där V är ett vektorrum över en kropp k . Definiera vad det innebär att $\lambda \in k$ är ett *egenvärde* till L och definiera vad som menas med *egenrummet* till L motsvarande egenvärdet λ . (1p)

Uppgift 2 Låt a, b och c vara reella tal och betrakta den linjära avbildningen $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ som ges av $L(x, y, z) = (x + ay - z, by, 2x + y + cz)$.

- (a) Bestäm för vilka värden på a, b och c avbildningen L är surjektiv. (2p)
- (b) Bestäm för vilka värden på a, b och c avbildningen L har rang 2 (dvs. dimensionen av bildrummet är 2). (2p)
- (c) Vad är dimensionen av nollrummet (kärnan) till L i dessa fall (dvs. då L är surjektiv respektive av rang 2)? (1p)

Uppgift 3 Betrakta den linjära avbildningen $L: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ som i standardbasen har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -7 \\ 0 & 5 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Hur många vektorer i $\mathbb{C}^3$ är en egenvektor till L ? (1p)
- (b) Hitta alla egenvärden till L samt dimensionen av motsvarande egenrum. (3p)
- (c) Är L diagonaliserbar? Motivera ditt svar. (1p)

Uppgift 4 Betrakta vektorrummet $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ av polynom av grad högst 2 med komplexa koefficienter, utrustat med den inre produkten $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x) \overline{q(x)} dx$. Beräkna projektionen av polynomet $x + 3$ på delrummet U som spänns upp av polynomen 1 och x^2 . (5p)

Uppgift 5 Låt V vara ett vektorrum över $\mathbb{C}$ med en inre produkt $\langle -, - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ och låt $L: V \rightarrow V$ vara en operator.

(a) Definiera (den Hermiteska) *adjunkten* till L samt vad det innebär för L att vara *normal*. (2p)

(b) Antag att $V = \mathbb{C}^2$ och $\langle -, - \rangle$ standard inre produkten på $\mathbb{C}^2$: (2p)

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle := x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2}.$$

För vilka $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ gäller det att matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

representerar en självdjungerad operator med avseende på en ortonormal bas?

(c) Vektorrummet $M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ av 2×2 -matriser över $\mathbb{C}$ kan betraktas som ett vektorrum av dimension 8 över $\mathbb{R}$. Visa att mängden $S \subseteq M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ bestående av alla självdjungerade matriser bildar ett delrum över $\mathbb{R}$ samt bestäm dess dimension. (2p)

Uppgift 6

(a) Betrakta den kvadratiske formen $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ som ges av (3p)

$$q(x, y) = 3x^2 + 4xy + 2y^2.$$

Hitta matrisen $[q]_{\beta}$ med avseende på den ordnade basen $\beta = \{(1, 1), (1, -1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$, dvs. den matris sådan att

$$q(v) = [v]_{\beta}^T [q]_{\beta} [v]_{\beta}$$

för alla $v \in \mathbb{R}^2$.

(b) Hitta singularvärdena till matrisen (3p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lycka till!

Rättning av tentan bör vara färdig inom tre veckor och en kopia av rättad tenta skickas sedan ut via mail. Se <https://www.math.su.se/tentaaterlämning> för mer information.