

Skriv tydligt och motivera dina lösningar väl. Skrivtiden är 5 timmar. Inga hjälpmedel utöver penna och suddgummi är tillåtna. Visa legitimation. Maximalt antal poäng är 30 och 15 poäng ger betyget åtminstone E.

Uppgift 1

- (a) Betrakta den linjära avbildningen $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ som ges av $L(x, y) = (x, 2x + y)$ och låt $S \subseteq \mathbb{R}^2$ vara mängden av alla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sådana att $L(x, y) = (0, 0)$ eller $L(x, y) = (1, 1)$. Bestäm om S är ett delrum av $\mathbb{R}^2$ och motivera ditt svar. (1p)
- (b) Antag att vi har ett linjärt ekvationssystem $Ax = b$ där A är en $m \times n$ -matris med reella tal, $b \in \mathbb{R}^m$ och $n > m$. Givet att vi har en vektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ som löser ekvationssystemet, vad kan vi säga om antalet lösningar till ekvationssystemet? Skulle x_0 kunna vara den enda lösningen? Motivera ditt svar. (1p)
- (c) Låt $L: V \rightarrow V$ vara en linjär avbildning där V är ett vektorrum över en kropp k . Definiera vad det innebär att $\lambda \in k$ är ett *egenvärde* till L och definiera vad som menas med *egenrummet* till L motsvarande egenvärdet λ . (1p)

Lösning:

- (a) Vi har att $(1, -1)$ är ett element i S eftersom $L(1, -1) = (1, 1)$. Men $2(1, -1) = (2, -2)$ ligger ej i S eftersom $L(2, -2) = (2, 2)$. Alltså är S ej sluten under skalärmultiplikation och därmed *inte* ett delrum.
- (b) Om x_0 är en lösning så är alla lösningar av formen $x_0 + v$ där v är en vektor i nollrummet. Dimensionssatsen säger att dimensionen av nollrummet är minst $n - m > 0$. Eftersom nollrummet då innehåller oändligt många element så finns det oändligt många lösningar till ekvationssystemet. Alltså kan x_0 ej vara den enda lösningen.
- (c) En skalär $\lambda \in k$ är ett egenvärde till L om det finns en icke-noll vektor $v \in V$ sådan att $L(v) = \lambda v$. Egenvärderummet till L motsvarande egenvärdet λ är mängden av alla vektorer $v \in V$ sådana att $L(v) = \lambda v$, dvs. nollrummet till avbildningen $L - \lambda I$.

Uppgift 2 Låt a, b och c vara reella tal och betrakta den linjära avbildningen $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ som ges av $L(x, y, z) = (x + ay - z, by, 2x + y + cz)$.

- (a) Bestäm för vilka värden på a, b och c avbildningen L är surjektiv. (2p)
- (b) Bestäm för vilka värden på a, b och c avbildningen L har rang 2 (dvs. dimensionen av bildrummet är 2). (2p)
- (c) Vad är dimensionen av nollrummet (kärnan) till L i dessa fall (dvs. då L är surjektiv respektive av rang 2)? (1p)

Lösning:

- (a) Avbildningen L är surjektiv om och endast om dess matris A är inverterbar (Dimensionssatsen). Detta sker när $\det(A) \neq 0$. Vi har att

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 0 & b & 0 \\ 2 & 1 & c \end{pmatrix},$$

så $\det(A) = b(c+2)$. Alltså är L surjektiv när $b \neq 0$ och $c \neq -2$.

- (b) Avbildningen L har rang 2 när $\det(A) = 0$, dvs. $b = 0$ eller $c = -2$, och bildrummet har dimension 2. Om $b = 0$ får vi att L har rang två precis då $(a, 0, 1)$ och $(-1, 0, c)$ inte båda ligger i spannet av $(1, 0, 2)$. Detta sker när $(a, c) \neq (1/2, -2)$. Om $b \neq 0$ och $c = -2$ får vi att L har rang 2 för alla värden på a . För att sammanfatta: L har rang 2 när antingen $b = 0$ och $(a, c) \neq (1/2, -2)$ eller $b \neq 0$ och $c = -2$.
- (c) När L är surjektiv är $\dim(\ker(L)) = 0$ enligt dimensionssatsen. När L har rang 2 är $\dim(\ker(L)) = 1$ enligt dimensionssatsen.

Uppgift 3 Betrakta den linjära avbildningen $L: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ som i standardbasen har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -7 \\ 0 & 5 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Hur många vektorer i $\mathbb{C}^3$ är en egenvektor till L ? (1p)
- (b) Hitta alla egenvärden till L samt dimensionen av motsvarande egenrum. (3p)
- (c) Är L diagonaliserbar? Motivera ditt svar. (1p)

Lösning:

- (a) Över $\mathbb{C}$ finns det alltid minst en egenvektor eftersom det karakteristiska polynomet har minst en rot i $\mathbb{C}$ (enligt algebrans fundamentalsats). Eftersom varje skalärmultiplik av en egenvektor också är en egenvektor finns det oändligt många egenvektorer.
- (b) Det karakteristiska polynomet är $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-\lambda)^2(5-\lambda) + (-32+7(5-\lambda)) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 = -(\lambda-3)(\lambda-1)^2$. Alltså är egenvärdena $\lambda_1 = 3$ och $\lambda_2 = 1$ (med algebraisk multiplicitet 2). För $\lambda_1 = 3$ har vi att

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -7 \\ 0 & 2 & -8 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

vilket radreduceras till

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alltså är egenrummet för $\lambda_1 = 3$ ett-dimensionellt och spänns upp av vektorn $(3, 4, 1)$.

För $\lambda_2 = 1$ har vi att

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -7 \\ 0 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

vilket radreduceras till

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alltså är egenrummet för $\lambda_2 = 1$ också ett-dimensionellt och spänns upp av vektorn $(1, 2, 1)$.

- (c) Eftersom summan av de geometriska multipliciteterna ($1 + 1 = 2$) är mindre än dimensionen av vektorrummet så kan det omöjligt finnas en bas av egenvektorer. Dvs. är L ej diagonaliserbar.

Uppgift 4 Betrakta vektorrummet $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ av polynom av grad högst 2 med komplexa koefficienter, utrustat med den inre produkten $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x)\overline{q(x)} dx$. Beräkna projektionen av polynomet $x + 3$ på delrummet U som spänns upp av polynomen 1 och x^2 . (5p)

Lösning: Vi noterar att x är ortogonal mot både 1 och x^2 eftersom x och x^3 är *udda* funktioner över intervallet $[-1, 1]$. Eftersom $U = \text{Span}(1, x^2)$ så är x ortogonal mot hela U . Eftersom 3 ligger i $\text{Span}(1) \subseteq U$ så får vi att $\text{proj}_U(x + 3) = \text{proj}_U(3) = 3$.

Uppgift 5 Låt V vara ett vektorrum över $\mathbb{C}$ med en inre produkt $\langle -, - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ och låt $L: V \rightarrow V$ vara en operator.

- (a) Definiera (den Hermiteska) *adjunkten* till L samt vad det innebär för L att vara *normal*. (2p)
- (b) Antag att $V = \mathbb{C}^2$ och $\langle -, - \rangle$ standard inre produkten på $\mathbb{C}^2$: (2p)

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle := x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2}.$$

För vilka $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ gäller det att matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

representerar en självadjungerad operator med avseende på en ortonormal bas?

- (c) Vektorrummet $M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ av 2×2 -matriser över $\mathbb{C}$ kan betraktas som ett vektorrum av dimension 8 över $\mathbb{R}$. Visa att mängden $S \subseteq M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ bestående av alla självadjungerade matriser bildar ett delrum över $\mathbb{R}$ samt bestäm dess dimension. (2p)

Lösning:

- (a) Den Hermiteska adjunkten till L är den unika linjära avbildning $L^*: V \rightarrow V$ sådan att $\langle L(v), w \rangle = \langle v, L^*(w) \rangle$ för alla $v, w \in V$. En operator L är normal om den kommuterar med sin adjunkt, dvs. om $LL^* = L^*L$.
- (b) En matris A representerar en självadjungerad operator om och endast om $A = A^*$ där A^* är den konjugattransponerade av A . Vi har att

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}.$$

Alltså är A självadjungerad när $a = \bar{a}$, $d = \bar{d}$ och $b = \bar{c}$. Detta sker precis när $a, d \in \mathbb{R}$ och $c = \bar{b}$.

- (c) Låt S vara mängden av alla självadjungerade linjära avbildningar $L: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$. Det är klart att nollavbildningen är självadjungerad. Vi visar att S är ett delrum av vektorrummet av alla linjära avbildningar genom att visa att S är sluten under addition och skalärmultiplikation (Delrumstestet). Låt $L_1, L_2 \in S$ och $\alpha \in \mathbb{R}$. Då är

$$(L_1 + L_2)^* = L_1^* + L_2^* = L_1 + L_2$$

och

$$(\alpha L_1)^* = \bar{\alpha} L_1^* = \bar{\alpha} L_1 = \alpha L_1.$$

Alltså är $L_1 + L_2$ och αL_1 också självadjungerade, dvs. S är sluten under addition och skalärmultiplikation. Alltså är S ett delrum av vektorrummet av alla linjära avbildningar. Enligt del (b) kan varje självadjungerad linjär avbildning representeras av en matris av formen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & d \end{pmatrix}$$

där $a, d \in \mathbb{R}$ och $b \in \mathbb{C}$. Eftersom a och d vardera bidrar med en fri parameter (reella tal) och b bidrar med två fria parametrar (reella och imaginära delen), så har vi totalt 4 fria parametrar. Alltså är dimensionen av delrummet av alla självadjungerade linjära avbildningar 4.

Uppgift 6

- (a) Betrakta den kvadratiske formen $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ som ges av (3p)

$$q(x, y) = 3x^2 + 4xy + 2y^2.$$

Hitta matrisen $[q]_\beta$ med avseende på den ordnade basen $\beta = \{(1, 1), (1, -1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$, dvs. den matris sådan att

$$q(v) = [v]_\beta^T [q]_\beta [v]_\beta$$

för alla $v \in \mathbb{R}^2$.

- (b) Hitta singularvärderna till matrisen (3p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösning:

- (a) Låt $u_1 = (1, 1)$ och $u_2 = (1, -1)$. Den unika symmetriska bilinjära formen

$$f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

associerad till q genom $q(x) = f(x, x)$ för alla $x \in \mathbb{R}^2$, bestäms på basvektorerna av:

$$f(u_1, u_1) = q(u_1) = q(1, 1) = 3(1)^2 + 4(1)(1) + 2(1)^2 = 9,$$

$$f(u_2, u_2) = q(u_2) = q(1, -1) = 3(1)^2 + 4(1)(-1) + 2(-1)^2 = 1,$$

$$f(u_1, u_2) = \frac{1}{2} (q(u_1 + u_2) - q(u_1) - q(u_2)) = \frac{1}{2} (q(2, 0) - 9 - 1) = \frac{1}{2} (12 - 9 - 1) = 1.$$

Alltså är matrisen till q med avseende på basen $\{u_1, u_2\}$:

$$\begin{pmatrix} q(u_1) & f(u_1, u_2) \\ f(u_1, u_2) & q(u_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Singulärvärdena till A är kvadratrötterna av egenvärdena till A^*A . Vi har att

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Det karakteristiska polynomet är

$$p(\lambda) = \det(A^*A - \lambda I) = (3 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 4)(\lambda - 2).$$

Alltså är egenvärdena till A^*A lika med $\lambda_1 = 4$ och $\lambda_2 = 2$. Singulärvärdena till A är då $\sigma_1 = \sqrt{4} = 2$ och $\sigma_2 = \sqrt{2}$.

Rättning av tentan bör vara färdig inom tre veckor och en kopia av rättad tenta skickas sedan ut via mail. Se <https://www.math.su.se/tentaaterlamning> för mer information.