

**Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas.** Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Max antal poäng på tentan är 30, och 15 skrivningspoäng ger betyg åtminstone E. Bonuspoäng från terminens kontrollskrivningar ger nedan eventuella tillgodoräkningar (uppgifter som ej behöver besvaras på tentan). Skriv i din tenta vilka som tillgodoräknas.

Bonuspoäng	8–15	16–23	24–30
Tillgodoräknas	1a	1a och 1b	hela uppgift 1

### Påminnelse.

- Om inget annat anges så används de vanliga inre produkterna på vektorrummen  $\mathbb{R}^n$  och  $\mathbb{C}^n$ .
- $P_n(\mathbb{F})$  står för  $\mathbb{F}$ -vektorrummet av polynom av grad högst  $n$  med koefficienter i kroppen  $\mathbb{F}$ .
- $M_{m \times n}(\mathbb{F})$  står för  $\mathbb{F}$ -vektorrummet av  $m \times n$ -matriser med element i kroppen  $\mathbb{F}$ .

### Uppgifter.

- (a) Avgör om mängden  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$  utgör ett delrum till  $\mathbb{R}^2$  eller inte. (1p)
  - (b) Låt  $T : V \rightarrow V$  vara en linjär operator på ett ändligtdimensionellt vektorrum  $V$ . Definiera vad det betyder att  $T$  är *diagonaliserbar*. (1p)
  - (c) Låt  $c \in \mathbb{R}$  och låt  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vara den linjära avbildningen  $T(x, y) = c(x, y)$ . För vilka  $c \in \mathbb{R}$  är denna avbildning en isometri/ortogonal? (1p)
- (a) Låt  $T : V \rightarrow W$  vara en linjär avbildning mellan vektorrum. Ange definitionerna av *bildrummet*  $R(T)$  och *nollrummet*  $N(T)$ . (1p)
  - (b) Definiera en linjär avbildning  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$  genom (4p)

$$T(p(x)) = (x - 1)p''(x) - 2p'(x).$$

Bestäm rangen av  $T$ , en bas för bildrummet  $R(T)$  samt en bas för nollrummet  $N(T)$ .

3. Betrakta vektorrummet  $P_2(\mathbb{R})$  utrustat med inre produkten (5p)

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)x^2 dx.$$

(Observera faktorn  $x^2$ .) Bestäm en ortogonal bas för  $P_2(\mathbb{R})$  relativt denna inre produkt, samt en bas för delrummet  $U = \text{span}(\{x\})^\perp$ .

Var god vänd!

4. (a) Låt  $\mathbb{F}$  vara kroppen  $\mathbb{C}$  eller  $\mathbb{R}$ , och låt  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$  vara en matris med element i  $\mathbb{F}$ . (1p)  
 Ange definitionerna av att  $A$  är *normal* respektive *självadjungerad*.
- (b) För var och en av följande matriser och vektorrum, avgör om vektorrummet har en (3p)  
 ON-bas bestående av egenvektorer för matrisen.
- i.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ , vektorrummet  $\mathbb{R}^2$
- ii.  $B = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ , vektorrummet  $\mathbb{C}^2$
- (c) Ange en matris  $C \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  sådan att det finns en ON-bas för  $\mathbb{C}^2$  som består av (1p)  
 egenvektorer för  $C$ , men ingen ON-bas för  $\mathbb{R}^2$  som består av egenvektorer för  $C$ .

5. Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Beräkna singularvärderna  $\sigma_1 \geq \sigma_2$  för  $A$ . (2p)
- (b) Hitta en ON-bas  $v_1, v_2, v_3$  för  $\mathbb{R}^3$  och en ON-bas  $u_1, u_2$  för  $\mathbb{R}^2$  sådan att  $Av_1 = \sigma_1 u_1$ , (3p)  
 $Av_2 = \sigma_2 u_2$  och  $Av_3 = 0$  (0-vektorn i  $\mathbb{R}^2$ ).
- (c) Med hjälp av de föregående två delarna, skriv ned en singularvärdesuppdelning av  $A$ . (1p)

6. (a) Betrakta matrisen (3p)

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestäm samtliga egenvärden till  $M$  och en bas för varje motsvarande egenrum, och avgör om  $M$  är diagonaliserbar.

- (b) Låt  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ , där  $n \geq 1$ , och låt  $\lambda \in \mathbb{F}$  vara ett egenvärde till  $A$ . Visa direkt (3p)  
 utifrån definitionerna (alltså utan att använda några satser) att kolonnerna i matrisen  
 $A - \lambda I$  är linjärt beroende. Måste *raderna* dessutom vara linjärt beroende?

Rättningen av tentan bör vara färdig inom 3 veckor efter tentamensskrivning. Därefter kan en kopia av tentan fås från studentexpeditionen:

<https://www.math.su.se/tentaaterlarning>